

Dualität von Schnitten für die metrische Projektion und von Fortsetzungen kompakter Operatoren

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Günther Nürnberg
aus Marktredwitz

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Dualität von Schnitten für die metrische Projektion und von Fortsetzungen kompakter Operatoren

**Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Doktorgrades**



**vorgelegt von
Günther Nürnberger
aus Marktrechwitz**

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:	14.5.1975
Vorsitzender der Promotionskommission:	Prof. Dr. H. Behrens
Erstberichterstatte:	Prof. Dr. D. Kölzow
Zweitberichterstatte:	Prof. Dr. G. Meinardus

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung		1
Kapitel I	SCHNITTE FÜR DIE METRISCHE PROJEKTION	
§ 1	Charakterisierungen der metrischen Projektion	9
§ 2	Stetige Schnitte für die metrische Projektion	17
§ 3	Eine Charakterisierung von stetigen Schnitten für die metrische Projektion	37
§ 4	Borel-meßbare Schnitte für die metrische Projektion	40
§ 5	Quasi-additive, homogene Schnitte und Schnitte mit der Sonneneigenschaft für die metrische Projektion	46
§ 6	Lineare Schnitte für die λ -metrische Projektion	55
Kapitel II	ANWENDUNGEN VON SCHNITTEN FÜR DIE METRISCHE PROJEKTION	
§ 1	Stetige Schnitte für die metrische Projektion und normerhaltende Fortsetzung kompakter Operatoren	61
§ 2	Lineare Schnitte für die λ -metrische Projektion und Fortsetzungen kompakter Operatoren	72
§ 3	Charakterisierungen von Hilberträumen durch Schnitteigenschaften der metrischen Projektion	83
Literaturverzeichnis		91

Einleitung

Ausgangspunkt der Approximationstheorie ist die Frage nach der Charakterisierung, Existenz und Eindeutigkeit von Elementen bester Approximation und die Aufstellung numerischer Verfahren (siehe Achieser [1], Cheney [1], Meinardus [1] und Singer [1]). In jüngster Zeit untersucht man Eigenschaften der mengenwertigen metrischen Projektion. Insbesondere werden Schnittprobleme für diese Abbildung behandelt. Einen fundamentalen Satzsatz für beliebige mengenwertige Abbildungen bewies Michael in [1].

Kapitel I enthält Aussagen über Schnitteigenschaften der metrischen Projektion.

§ 1: Die hier erzielten elementaren Charakterisierungen der metrischen Projektion P_G werden zum Teil in den späteren Paragraphen verwendet:

Sei G ein proximaler Teilvektorraum eines normierten Raumes E und $P: E \rightarrow 2^G$, so ist $P = P_G$ genau dann, wenn $P \subseteq P_G$, G Fixpunktmenge von P , P quasi-linear und $\|Id - P\| \leq 1$ ist.

Sei G eine proximale Teilmenge eines normierten Raumes E und $P: E \rightarrow 2^G$, so ist $P \subseteq P_G$ genau dann, wenn G Fixpunktmenge von P und $\|x_1 - q_1\| - \|x_2 - q_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$ ist für alle x_1, x_2 aus E , alle q_1 aus $P(x_1)$ und alle q_2 aus $P(x_2)$.

Diese Ergebnisse lassen sich sofort auf den Tschebyscheff-Fall übertragen. Zarantonello [1] gab eine Charakterisierung der metrischen Projektion in Hilberträumen bei tschebyscheffscher Basismenge mit einer stärkeren Bedingung als der im letzten Satz. Diese Bedingung ist jedoch selbst in strikt konvexen, reflexiven Banachräumen i.a. nicht erfüllt.

§ 2: Stetige Schnitte der metrischen Projektion existieren i.a. nur unter starken Voraussetzungen. Brown [1] gab eine Bedingung für normierte Räume, so daß jeder endlich-dimensionale Teilvektorraum G einen stetigen Schnitt für P_G zuläßt. Sie ist allerdings nur in seltenen Fällen erfüllt (siehe Blätter [1], Blätter, Morris, Wulbert [1] und Brown [1]). Charakterisierungen von stetigen Schnitten für die metrische Projektion sind bisher lediglich für eindimensionale Teilvektorräume in l_1 und $C(X)$ bekannt (siehe Lazar [1] und Lazar, Morris, Wulbert [1]).

Lazar, Morris und Wulbert [1] bewiesen eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion in L_1 bei

nichtatomarem Maßraum. Wir zeigen eine Nichtexistenzaussage in strikt konvexen Räumen:

In einem strikt konvexen Raum existiert bei proximaler, nicht tschebyscheffscher Basismenge G kein stetiger Schnitt für P_G .

Damit ist also insbesondere das Schnittproblem für alle L^p -Räume ($1 < p < \infty$) ebenso wie für alle Hilberträume gelöst. Hierzu ein Folgerung: Die verallgemeinerten rationalen Funktionen erlauben in L^p ($1 < p < \infty$) keinen stetigen Schnitt für P_G . Brosowski und Deutsch [1] bewiesen den obigen Satz über strikt konvexe Räume für die Inner-Radial-Unterhalbstetigkeit von P_G anstelle eines stetigen Schnittes für P_G .

Lazar, Morris und Wulbert [1] zeigten, daß unter gewissen Voraussetzungen in $C(X)$ ein stetiger Schnitt für die metrische Projektion genau dann existiert, wenn die Basismenge tschebyscheff ist. Brown [2] gab jedoch ein Gegenbeispiel für diese Aussage. Wir zeigen in einem allgemeineren Fall:

In $C(X)$, wobei X ein kompakter, zusammenhängender Hausdorffraum sei, existiert bei einem endlich-dimensionalen Teilvektorraum G ein stetiger Schnitt für P_G mit der Nulleigenschaft genau dann, wenn G tschebyscheff ist.

Die Nulleigenschaft wird von uns eingeführt und stellt in gewisser Weise eine natürliche Bedingung dar.

Nach Michaels Schnittsatz folgt aus der Unterhalb-Stetigkeit von P_G die Existenz eines stetigen Schnittes. Die Umkehrung gilt i.a. nicht (siehe Lazar, Morris, Wulbert [1]). Unter Verwendung unserer Ergebnisse erhalten wir:

In $C(X)$, wobei X ein kompakter Hausdorffraum sei, folgt für jeden endlich-dimensionalen Teilvektorraum G aus der Existenz eines stetigen Schnittes für P_G mit der Nulleigenschaft die Unterhalb-Stetigkeit von P_G .

Außerdem zeigen wir, daß in L_1 bei nicht notwendig nichtatomarem Maßraum gilt:

In L_1 existiert bei σ -endlichen Maßraum und bei einem endlich-dimensionalen Teilvektorraum $G = \langle q_\alpha \rangle$, wobei $\text{supp}(q_\alpha)$ nicht Vereinigung endlich vieler Atome sei, ein stetiger Schnitt mit der Nulleigenschaft genau dann, wenn G tschebyscheff ist.

Man erkennt also, daß es in diesem Fall genügt, eine gewisse Art von Nichtatomarität lediglich auf der Basismenge zu fordern.

§ 3: Deutsch, Pollul und Singer [1] charakterisierten die Existenz stetiger Schnitte für die metrische Projektion mit Hilfe anderer mengenwertiger Abbildungen, etwa der Hahn-Banach-Abbildung. Wir geben eine Charakterisierung deselben Typs mit einer von uns neu definierten Abbildung:

Für einen proximalen Teilvektorraum G eines normierten Raumes E existiert ein stetiger Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$ genau dann, wenn ein stetiger Schnitt für $P: E \rightarrow 2^G$ existiert, wobei $P(x) := \{ y \text{ aus } E: f(y)=f(x) \text{ für alle } f \text{ aus } G^\perp, \|y\|=\|x\|_{G^\perp} \}$ sei für alle x aus E .

Bedingungen, durch die $P(x)$ definiert wird, treten bei der Charakterisierung proximaler Mengen auf.

§ 4: Da stetige Schnitte für die metrische Projektion nur unter starken Voraussetzungen existieren, stellt sich das Problem, ob die metrische Projektion Schnitte mit abgeschwächten Stetigkeitseigenschaften zuläßt. Durch Anwendung von Sätzen über meßbare Schnitte für beliebige mengenwertige Abbildungen (siehe Himmelberg, van Vleck [1]) erhalten wir:

Für jede separable, approximativ-kompakte Basismenge G eines metrischen Raumes existiert ein Borel-meßbarer Schnitt für P_G .

Für einen proximalen, separablen Teilvektorraum G eines normierten Raumes, für den P_G oberhalb-stetig ist, existiert ein Borel-meßbarer Schnitt für P_G .

Für eine proximale, separable, σ -kompakte Basismenge G eines metrischen Raumes existiert ein Borel-meßbarer Schnitt für P_G .

Insbesondere läßt jede kompakte Menge G eines metrischen Raumes und jeder separable, endlich-dimensionale Teilvektorraum eines normierten Raumes einen Borel-meßbaren Schnitt für P_G zu.

§ 5: Borel-meßbare Schnitte für die metrische Projektion existieren demnach bereits bei schwachen Kompaktheitseigenschaften der Basismenge. Damit erhebt sich schließlich die Frage, welche inneren Schnitteigenschaften die metrische Projektion besitzt. In diesem Zusammenhang beweisen wir zunächst die folgenden allgemeinen Schnittsätze:

Sei E ein Vektorraum, G ein Teilvektorraum von E und $F: E \rightarrow 2^G$ eine quasi-additive Abbildung mit Fixpunktmenge G . Dann existiert ein quasi-additiver Schnitt für F .

Seien E und G Vektorräume und $F: E \rightarrow 2^G$ eine homogene Abbildung. Dann existiert ein homogener Schnitt für F .

Seien E und G Kegel mit Scheitel in O und $F: E \rightarrow 2^G$ eine positiv-homogene Abbildung. Dann existiert ein positiv-homogener Schnitt für F .

Unter Verwendung der ersten Charakterisierung der metrischen Projektion in § 1 können diese Ergebnisse sofort auf die metrische Projektion angewandt werden.

Die bei den obigen Schnittsätzen im Beweis verwendete Äquivalenzklassenzerlegung versagt bei der Frage, ob jede quasi-lineare mengenwertige Abbildung einen quasi-linearen Schnitt zuläßt. Wir zeigen jedoch unter Verwendung anderer Methoden:

Sei E ein normierter Raum, G ein endlich-dimensionaler Teilvektorraum von E und $F: E \rightarrow 2^G$ eine quasi-lineare Abbildung mit G als Fixpunktmenge, so daß $F(x)$ abgeschlossen und konvex ist für alle x aus E . Dann existiert ein quasi-linearer Schnitt mit der Sonneneigenschaft.

Auch dieser Satz kann sofort auf die metrische Projektion angewandt werden. Jeder Schnitt mit der Sonneneigenschaft ist radial-stetig. Diese Begriffe werden von uns eingeführt und stehen in Zusammenhang mit bekannten Begriffen aus der Approximationstheorie.

§ 6: Hier beweisen wir Existenzaussagen für lineare Schnitte der λ -metrischen Projektion:

Sei E ein normierter Raum und G ein proximaler Teilvektorraum von E mit $\dim E/G = n$. Dann existiert ein linearer Schnitt für P_G^n .

Im Fall $n = 1$ wurde dieser Satz in Singer [1] mit elementaren Methoden bewiesen, die bei beliebigem n aus $\mathbb{N}$ nicht mehr anwendbar sind. Für endlich-dimensionale Basismengen gilt:

Sei E ein normierter Raum und G ein Teilvektorraum von E mit $\dim G = n$. Dann existiert ein linearer Schnitt für P_G^{n+1} .

Für M-Ideale als Basismenge erhalten wir:

Für jedes abgeschlossene M-Ideal G eines Banachraumes existiert ein linearer Schnitt für P_G , falls G reflexiv ist oder (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt.

Die beiden folgenden Sätze beruhen wesentlich auf Resultaten von Dixmier [1] :

Für jeden Banachraum E existiert ein linearer Schnitt für $P_{E^\perp}: E'' \rightarrow 2^{E^\perp}$.

In jedem reflexiven Banachraum E , welcher isomorph einem Dualraum ist, gibt es einen nicht trivialen abgeschlossenen Teilvektorraum G von E' , für den ein linearer Schnitt für $P_G: E'' \rightarrow 2^G$ existiert.

Beispiele für solche Banachräume sind l_1 und l_∞ .

In Kapitel II zeigen wir, daß die Existenz von Schnitten der metrischen Projektion dual ist zu Aussagen über die Fortsetzung kompakter Operatoren. Außerdem geben wir isomorphe und isometrische Charakterisierungen von Hilberträumen durch Schnittaussagen der metrischen Projektion.

In den folgenden beiden Paragraphen sei E stets ein Banachraum und G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E .

§ 1: Wir beweisen hier, daß die Existenz stetiger Schnitte der metrischen Projektion in gewisser Weise dual ist zu Aussagen über die normerhaltende Fortsetzung kompakter Operatoren. Diese Zusammenhänge basieren entscheidend auf einer Dualität zwischen der metrischen Projektion und der Hahn-Banach-Abbildung H :

Wir betrachten die folgenden Aussagen:

(1) Es existiert ein stetiger Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

(2) Es existiert ein stetiger Schnitt für $H: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$.

Dann gilt: (1) $\Rightarrow$ (2), falls E/G reflexiv ist und (2) $\Rightarrow$ (1), falls G reflexiv ist oder (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt.

Lindenstraß [1] bewies eine hierzu duale Aussage ohne jegliche Reflexivitätsvoraussetzungen. Aus dem Vergleich zweier Diagramme ersieht man, daß die von Lindenstraß untersuchte Dualität sich nahezu kanonisch ergibt, während unser Problem gewisse Zusatzvoraussetzungen erfordert.

Eigenschaft (P'') wird von uns eingeführt und es wird u.a. gezeigt, daß $(E', G^\perp)$ stets Eigenschaft (P'') besitzt, was für spätere Resultate von Bedeutung ist.

Unter Verwendung des letzten Satzes erhalten wir:

Ist E/G reflexiv und existiert ein stetiger Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$, so besitzt jeder kompakte Operator $T: G^\perp \rightarrow F$, wobei F ein G -Raum ist, eine kompakte normerhaltende Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow F$.

Umgekehrt gilt:

Ist G reflexiv und tschebyscheff und besitzt jeder kompakte Operator $T: G^\perp \rightarrow c$ eine kompakte normerhaltende Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow c$, so existiert ein stetiger Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Lindenstrauß [1] bewies ein analoges duales Resultat.

§ 2: Gewisse Dualitätsaussagen gelten auch im linearen Fall. Wir zeigen, daß die Existenz linearer Schnitte der λ -metrischen Projektion dual ist zur Fortsetzung von Operatoren. Diese Sätze beruhen ähnlich wie in § 1 auf einer von uns bewiesenen Dualität zwischen der λ -metrischen Projektion und der λ -Hahn-Banach-Abbildung H^λ :

Wir betrachten die folgenden Aussagen:

- (1) Es existiert ein linearer Schnitt für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.
 - (2) Es existiert ein linearer Schnitt für $H^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$.
- Dann gilt: (1) $\Rightarrow$ (2), falls E/G reflexiv ist und (2) $\Rightarrow$ (1), falls G reflexiv ist oder (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt.

Fakhoury [1] bewies ein dazu duales Resultat ohne jegliche Reflexivitätsvoraussetzungen, die, wie wir zeigen, in unserem Fall wesentlich sind. Aus obigem Satz erhalten wir den angekündigten Zusammenhang zwischen Schnitt- und Fortsetzungsaussagen:

Wir betrachten die folgenden Aussagen:

- (1) Es existiert ein linearer Schnitt für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.
- (2) Für jeden Banachraum X besitzt jeder beschränkte Operator $T: G^\perp \rightarrow X$ eine beschränkte Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.
- (3) Für jeden Banachraum X besitzt jeder kompakte (bzw. schwach-kompakte) Operator $T: G^\perp \rightarrow X$ eine kompakte (bzw. schwach-kompakte) Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

(4) Für jeden endlich-dimensionalen Raum X besitzt jeder beschränkte Operator $T: G^\perp \rightarrow X$ eine beschränkte Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

Dann gilt: (1) $\Rightarrow$ (2) und (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Die Aussagen sind äquivalent, falls G reflexiv ist oder (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt.

Fakhoury [1] bewies ein dazu duales Resultat.

Durch Vergleich eines Spezialfalls unserer Ergebnisse mit denen von Fakhoury [1] erhalten wir Äquivalenzaussagen über lineare Schnitte für $P_{G^\perp}^\lambda$ und $P_{G^{\perp\perp}}^\lambda$, außerdem Äquivalenzaussagen über die Fortsetzung von $T: G \rightarrow X$ zu $\tilde{T}: E \rightarrow X$ und von $T: G^{\perp\perp} \rightarrow X$ zu $\tilde{T}: E'' \rightarrow X$. Schließlich bekommen wir Äquivalenzaussagen für Banachräume, deren Bidual ein P_λ -Raum ist.

§ 3: Schnitteigenschaften der metrischen Projektion werden hier verwendet, um isomorphe und isometrische Charakterisierungen von Hilberträumen zu erhalten:

Ein Banachraum E ist isomorph einem Hilbertraum genau dann, wenn es für jeden abgeschlossenen Teilvektorraum G von E ein $\lambda \geq 1$ gibt, so daß ein linearer Schnitt für P_G^λ existiert. Falls E reflexiv ist, kann linear durch gleichmäßig stetig ersetzt werden.

Fakhoury [1] bewies die letzte Aussage im linearen Fall mit $P_{G^\perp}^\lambda: E' \rightarrow 2^{G^\perp}$ anstelle von $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$. Außerdem geben wir eine isometrische Charakterisierung von Hilberträumen mittels linearer Schnitte für P_G :

Ein Banachraum E mit $\dim E \geq 3$ ist isometrisch isomorph einem Hilbertraum genau dann, wenn ein n aus $\mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq \dim E - 2$ (bzw. $2 \leq n \leq \dim E - 1$) existiert, so daß für jeden abgeschlossenen Teilvektorraum G von E mit $\dim G = n$ (bzw. $\dim E/G = n$) gilt: G ist proximal und es existiert ein linearer Schnitt für P_G .

Der letzte Satz wurde in Singer [1] unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß E strikt konvex ist, was zur Folge hat, daß alle abgeschlossenen Teilvektorräume bereits tschebyscheff sind.

Schließlich zeigen wir eine isometrische Charakterisierung von Hilberträumen durch lineare Schnitte für $P_{G^\perp}$:

Ein normierter Raum E mit $\dim E \geq 3$ ist isometrisch isomorph einem Prähilbertraum genau dann, wenn für jeden zweidimensionalen Teilvektorraum G von E ein linearer Schnitt für $P_{G^\perp}: E' \rightarrow 2^{G^\perp}$ existiert.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor D. Kölzow, danke ich herzlich für seine intensive wissenschaftliche Unterstützung, durch die diese Arbeit entscheidend gefördert wurde.

Kapitel I: Schnitte für die metrische Projektion

§ 1. Charakterisierungen der metrischen Projektion

Zunächst definieren wir grundlegenden Begriffe zur metrischen Projektion.

1. Definition:

Sei E ein metrischer Raum und G eine Teilmenge von E .

Für alle x aus E sei $d(x, G) := \inf \{d(x, g) : g \in G\}$ und

$P_G(x) := \{g_0 \in G : d(x, g_0) = d(x, G)\}$.

Die Elemente aus $P_G(x)$ heißen Elemente bester Approximation (für x bzgl. G).

G heißt proximal, falls $P_G(x)$ nicht leer ist für alle x aus E . G heißt semi-tschebyscheff, falls $P_G(x)$ höchstens einpunktig ist für alle x aus E . G heißt tschebyscheff, falls G proximal und semi-tschebyscheff ist.

Falls G proximal ist, heißt die oben definierte Abbildung P_G von E in 2^G die (mengenwertige) metrische Projektion bzgl. G , wobei $2^G := \{G' \subseteq G : G' \neq \emptyset\}$ ist.

Wir nennen G die Basismenge der metrischen Projektion $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Falls die Basismenge proximal und nicht tschebyscheff ist, sprechen wir vom mengenwertigen Fall.

Falls die Basismenge tschebyscheff ist, sprechen wir vom Tschebyscheff-Fall und betrachten die metrische Projektion in den meisten Situationen als punktwertige Abbildung, d.h. als Abbildung von E in G .

Seien E und G Mengen und $F: E \rightarrow 2^G$ eine beliebige

mengenwertige Abbildung, so heißt eine Abbildung $f: E \rightarrow G$ ein Schnitt für $F: E \rightarrow 2^G$, falls $f(x)$ aus $F(x)$ ist für alle x aus E .

Besitzen die Mengen E und G gewisse Strukturen, etwa lineare, topologische oder metrische Strukturen, und hat ein Schnitt bestimmte Eigenschaften bzgl. dieser Strukturen, so sprechen wir etwa von einem stetigen, Borelmeßbaren, homogenen, quasi-additiven, linearen oder quasi-linearen Schnitt.

Die genauen Definitionen werden in den einzelnen Paragraphen gegeben.

Es ist bekannt, daß $P_G(x)$ abgeschlossen (bzw. konvex) ist für alle x aus E , falls G abgeschlossen (bzw. konvex) ist (siehe Singer [1]).

Im folgenden geben wir elementare Charakterisierungen der mengenwertigen metrischen Projektion und übertragen diese auf den Tschebyscheff-Fall, bei dem die metrische Projektion als punktwertige Abbildung betrachtet wird.

Diese Ergebnisse werden zum Teil in den folgenden Paragraphen verwendet.

Zuerst aber benötigen wir die folgende Definition:

2. Definition:

Seien E und G $\mathbb{K}$ -Vektorräume, sowie F und F' mengenwertige Abbildungen von E in 2^G .

- (1) Wir schreiben $F \subseteq F'$ genau dann, wenn $F(x) \subseteq F'(x)$ ist für alle x aus E .
- (2) F heißt homogen (bzw. positiv-homogen), falls $F(ax) = aF(x)$ ist für alle x aus E und alle a aus $\mathbb{K}$ (bzw. $a \geq 0$).

(3) Sei nun G ein Teilvektorraum von E .

Dann heißt F quasi-additiv genau dann, wenn

$F(x + g) = F(x) + F(g)$ ist für alle x aus E und alle g aus G .

F heißt quasi-linear genau dann, wenn F homogen und quasi-additiv ist.

Für punktwertige Abbildungen f von E in G gelten die Definitionen (2) und (3) analog.

(4) Sind E und G normierte Räume, so definieren wir als "Norm von F "

$$\begin{aligned} \|F\| &:= \sup \left\{ \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} : 0 \neq x \in E \right\} \\ &:= \sup \left\{ \sup \left\{ \frac{\|g\|}{\|x\|} : g \in P_G(x) \right\} : 0 \neq x \in E \right\} . \end{aligned}$$

(5) Sei nun G eine Teilmenge des Vektorraumes E .

Dann heißt G Fixpunktmenge von F genau dann, wenn $F(g) = \{g\}$ ist für alle g aus G .

Wir geben nun die erste Charakterisierung der mengenwertigen metrischen Projektion:

3. Satz:

Sei E ein normierter Raum, G ein proximaler Teilvektorraum von E und $P: E \rightarrow 2^G$ eine mengenwertige Abbildung.

Dann ist $P = P_G$ genau dann, wenn (1) $P_G \subseteq P$,

(2) G Fixpunktmenge von P , (3) P quasi-linear und

(4) $\|Id - P\| \leq 1$ ist.

Beweis:

Die Notwendigkeit der Bedingung zeigen wir folgendermaßen:

Sei P die mengenwertige metrische Projektion P_G auf G .

Dann ist (1) trivial.

(2) ist erfüllt, denn es folgt unmittelbar aus der

Definition der metrischen Projektion, daß $P_G(q) = \{q\}$ ist für alle q aus G .

Wir zeigen nun, daß P_G quasi-additiv ist.

Seien x aus E und q aus G .

$$\begin{aligned} \text{Sei } q_0 \text{ aus } P_G(x+q), \text{ so folgt: } \|x - (q_0 - q)\| &= \|(x+q) - q_0\| \\ &= \inf \{ \|(x+q) - q'\| : q' \in G \} = \inf \{ \|x - q'\| : q' \in G \}. \end{aligned}$$

Daraus folgt: $q_0 - q \in P_G(x)$, d.h. $q_0 \in P_G(x) + \{q\} = P_G(x) + P_G(q)$.

Sei andererseits q_0 aus $P_G(x) + P_G(q) = P_G(x) + \{q\}$,

$$\begin{aligned} \text{so folgt: } q_0 - q \in P_G(x), \text{ d.h. } \|(x+q) - q_0\| &= \\ \|x - (q_0 - q)\| &= \inf \{ \|x - q'\| : q' \in G \} = \inf \{ \|(x+q) - q'\| : q' \in G \}. \end{aligned}$$

Also ist q_0 aus $P_G(x+q)$.

Wir zeigen nun, daß P_G homogen ist.

Der Fall x aus E und $a = 0$ ist trivial.

Seien daher x aus E und $0 \neq a$ aus $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \text{Sei } q_0 \text{ aus } P_G(ax), \text{ so gilt: } |a| \|x - \frac{1}{a}q_0\| &= \|ax - q_0\| = \\ &= \inf \{ \|ax - q\| : q \in G \} = |a| \inf \{ \|x - q\| : q \in G \}, \\ \text{d.h. } \frac{1}{a}q_0 &\text{ ist aus } P_G(x), \text{ also ist } q_0 \text{ aus } aP_G(x). \end{aligned}$$

Sei andererseits q_0 aus $aP_G(x)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a} \right| \|ax - q_0\| &= \|x - \frac{1}{a}q_0\| = \inf \{ \|x - q\| : q \in G \} = \\ &= \left| \frac{1}{a} \right| \inf \{ \|ax - q\| : q \in G \}, \text{ d.h. } q_0 \text{ ist aus } P_G(ax). \end{aligned}$$

Aus dem bisher Bewiesenen folgt also, daß P_G quasi-linear ist und damit ist (3) gezeigt.

Wir zeigen nun (4) :

Seien $x \neq 0$ aus E und q_0 aus $P_G(x)$, dann gilt, da 0 aus G ist: $\|x - q_0\| = \inf \{ \|x - q\| : q \in G \} \leq \|x\|$.

Daraus folgt: $\sup \{ \sup \{ \frac{\|x-q\|}{\|x\|} : q \in P_G(x) \} : 0 \neq x \in E \} \leq 1$,

d.h. $\|Id - P_G\| \leq 1$.

Daß die Bedingungen hinreichend sind, zeigen wir folgendermaßen:

Für x aus E zeigen wir: $P(x) \subseteq P_G(x)$.

Sei q_0 aus $P_G(x)$, so folgt aufgrund von (2) und (3):

$$q_0 - g \in P_G(x) + \{-g\} = P_G(x) + P_G(-g) = P_G(x-g).$$

Aufgrund von (4) folgt dann:

$$\|x - q_0\| = \|(x-g) - (q_0-g)\| \leq \|x - g\| \text{ für alle } g \in G,$$

d.h. q_0 ist aus $P_G(x)$, da q_0 aus G ist.

Also gilt aufgrund von (1): $P(x) = P_G(x)$.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Als Korollar zu Satz 3 erhalten wir folgende Charakterisierung der metrischen Projektion für den Fall, daß die Basismenge tschebyscheff ist. Hier betrachten wir die metrische Projektion als punktwertige Abbildung.

4. Korollar:

Sei E ein normierter Raum, G ein tschebyscheffscher Teilvektorraum von E und $p: E \rightarrow G$ eine punktwertige Abbildung. Dann ist p die metrische Projektion auf G genau dann, wenn (1) G Fixpunktmenge von p ,
(2) p quasi-linear und (3) $\|Id - p\| \leq 1$ ist.

Beweis:

Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt sofort aus Satz 3.

Der Beweis dafür, daß die Bedingungen hinreichend sind, ist analog dem im Satz 3.

5. Bemerkung:

Sowohl Satz 3 als auch Korollar 4 bleibt richtig, falls man die Bedingung, daß P (bzw. p) quasi-linear ist durch die schwächere Bedingung ersetzt, daß P (bzw. p) quasi-additiv ist.

Im nächsten Satz charakterisieren wir mengenwertige Abbildungen P mit der Eigenschaft $P \subseteq P_G$, wobei G

eine beliebige proximale Teilmenge eines normierten Raumes ist.

6. Satz:

Sei E ein normierter Raum, G eine proximale Teilmenge von E und P eine mengenwertige Abbildung von E in 2^G . Dann ist $P \subseteq P_G$ genau dann, wenn

(1) G Fixpunktmenge von P ist und

$$(2) \quad \frac{||x_1 - g_1|| - ||x_2 - g_2||}{||x_1 - x_2||} \leq 1 \quad \text{ist f\"ur alle}$$

x_1, x_2 aus E und alle g_1 aus $P(x_1)$ und alle g_2 aus $P(x_2)$.

Beweis:

Die Notwendigkeit der Bedingungen zeigen wir folgendermaßen:

Wir zeigen (1).

Sei g aus G , dann gilt: $P_G(g) = \{g\}$, woraus $P(g) = \{g\}$ folgt, da $P(x)$ nicht leer ist für alle x aus E .

Wir zeigen (2).

Seien x_1, x_2 aus E , g_1 aus $P(x_1) \subseteq P_G(x_1)$ und g_2 aus $P(x_2) \subseteq P_G(x_2)$, dann folgt: $||x_1 - g_1|| \leq ||x_1 - g_2||$
 $= ||(x_1 - x_2) + (x_2 - g_2)|| \leq ||x_1 - x_2|| + ||x_2 - g_2||$.

Ebenso gilt: $||x_2 - g_2|| \leq ||x_2 - g_1|| \leq ||x_2 - x_1|| + ||x_1 - g_1||$.

Daß die Bedingungen hinreichend sind, zeigen wir folgendermaßen:

Für x aus E zeigen wir $P(x) \subseteq P_G(x)$.

Sei g_0 aus $P_G(x)$ und g aus G , dann gilt, da g aus $P(g)$ ist:

$$\frac{||x - g_0|| - ||g - g||}{||x - g||} \leq 1, \text{ d.h. } ||x - g_0|| \leq ||x - g||.$$

Daraus folgt also: $g_0 \in P_G(x)$.

Damit ist Satz 6 bewiesen.

Als Korollar zu Satz 6 erhalten wir die folgende Charakterisierung der metrischen Projektion für den Fall, daß die Basismenge tschebyscheff ist. Hier betrachten wir die metrische Projektion wieder als punktwertige Abbildung.

7. Korollar:

Sei E ein normierter Raum, G eine tschebyscheffsche Teilmenge von E und p eine punktwertige Abbildung von E in G . Dann ist p die metrische Projektion auf G genau dann, wenn (1) G Fixpunktmenge von p ist

und (2)
$$\frac{\|x-p(x)\| - \|y-p(y)\|}{\|x-y\|} \leq 1$$
 ist für alle x, y aus E .

Zarantonello charakterisierte in [1] die punktwertige metrische Projektion in Hilberträumen bei abgeschlossen, konvexer Basismenge mit einer stärkeren Bedingung als der in Korollar 7 :

8. Satz:

Sei E ein Hilbertraum, G eine abgeschlossen, konvexe und damit tschebyscheffsche Teilmenge von E und p eine punktwertige Abbildung von E in G . Dann ist p die metrische Projektion auf G genau dann, wenn

(1) G Fixpunktmenge von p ist und (2)
$$\frac{\|(x-2p(x)) - (y-2p(y))\|}{\|x-y\|}$$

≤ 1 ist für alle x, y aus E .

Knott bewies in [1], daß die Bedingung (2) aus Satz 8

ersetzt werden kann durch (2')
$$\frac{\|(x-p(x)) - (y-p(y))\|}{\|x-y\|} \leq 1$$

für alle x, y aus E .

9. Bemerkung:

Wir zeigen, daß die Bedingung (2) aus Satz 7 selbst in strikt konvexen, reflexiven Banachräumen bei einem tschebyscheffschen Teilvektorraum als Basismenge nicht mehr für die metrische Projektion erfüllt ist, d.h. Bedingung (2) aus Korollar 7 kann selbst unter diesen starken Voraussetzungen nicht durch Bedingung (2) aus Satz 8 noch durch Bedingung (2') ersetzt werden.

Denn, angenommen es gilt für alle x, y aus E

$$\frac{\|(x-p(x)) - (y-p(y))\|}{\|x - y\|} \leq 1, \text{ so folgt: } \|p(x) - p(y)\|$$

$$= \|(x-p(x)) - (y-p(y)) - (x-y)\| \leq \|(x-p(x)) - (y-p(y))\| + \|x-y\| \leq 2 \|x-y\|.$$

Damit wäre die punktwertige metrische Projektion aber stetig. Dies steht jedoch im Widerspruch zu einem Beispiel von Kripke [1], in dem ein strikt konvexer, reflexiver Banachraum mit einem tschebyscheffschen Teilvektorraum als Basismenge angegeben ist, der eine unstetige metrische Projektion besitzt.

§ 2. Stetige Schnitte für die metrische Projektion

Zunächst benötigen wir die folgende Definition:

1. Definition:

Sei E ein normierter Raum.

- (1) E heißt strikt konvex genau dann, wenn für alle x, y aus E mit $x \neq y$ gilt: ist $\|x\| = 1 = \|y\|$, dann folgt $\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| < 1$.
- (2) Für alle x, y aus E sei $[x, y] := \{ax + (1-a)y : 0 \leq a \leq 1\}$
- (3) Sei x aus E und $r \geq 0$, dann definieren wir:

$$K(x, r) := \{y \in E : \|x - y\| < r\}$$

$$K'(x, r) := \{y \in E : \|x - y\| \leq r\}$$

$$S(x, r) := \{y \in E : \|x - y\| = r\}$$

Wir beweisen nun den folgenden Satz 2, aus dem sich ein Korollar ergeben wird, das eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion in strikt konvexen Räumen darstellt.

2. Satz:

Sei E ein normierter Raum und G eine proximale Teilmenge von E . Es existiere ein stetiger Schnitt

$$f_G : E \rightarrow G \quad \text{für} \quad P_G : E \rightarrow 2^G.$$

Dann ist $[g, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))$ für alle x aus E und alle g aus $P_G(x)$.

Beweis:

Zunächst zeigen wir die folgende Behauptung:

Sei G eine proximale Teilmenge von E und existiere ein stetiger Schnitt f_G für P_G und seien O aus $E \setminus G$ und g_O aus $P_G(O)$. Dann gilt: $[g_O, f_G(O)] \subseteq S(O, d(O, G))$

Beweis der Behauptung:

Für g_0 aus $P_G(0)$ zeigen wir: $[g_0, f_G(0)] = S(0, d(0, G))$.

(1) Zunächst zeigen wir für alle $0 < b < 1$:

$A_b := S(0, d(0, G)) \cap S(bg_0, d(bg_0, G))$ ist sternförmig um g_0 , d.h. $ag_0 + (1-a)z$ ist aus A_b für alle z aus A_b und alle $0 \leq a \leq 1$. (Dies wurde von Klee in [1] bewiesen.)

Beweis von (1):

Seien $0 < b < 1$ und z aus A_b , dann gilt:

$$\|z\| = d(0, G) = \|g_0\| \quad \text{und} \quad \|z - bg_0\| = d(bg_0, G) = (1-b)d(0, G).$$

Im Folgenden beachte man die Tatsache, daß, falls die Endpunkte einer "Strecke" $[x, y]$ und ein Punkt im "Innern" dieser Strecke gleiche Norm besitzen, alle Elemente der Strecke dieselbe Norm besitzen. Dies beweist man leicht durch Widerspruch.

(a) Es gilt: $\|bg_0 + (1-b)\frac{z - bg_0}{1-b}\| = \|z\| = d(0, G)$.

Daraus folgt: $\|cg_0 + (1-c)\frac{z - bg_0}{1-b}\| = d(0, G)$ für alle $0 \leq c \leq 1$.

Wir definieren nun: $c := 2b - b^2$, d.h. $0 < c < 1$.

Damit gilt dann:

$$\|(2b - b^2)g_0 + (1 - (2b - b^2))\frac{z - bg_0}{1-b}\| = d(0, G) \quad \text{und}$$

$$\|bg_0 + (1-b)z\| = d(0, G) \quad \text{und} \quad \|ag_0 + (1-a)z\| = d(0, G) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

und $ag_0 + (1-a)z \in S(0, d(0, G)) \quad (0 \leq a \leq 1)$.

(b) Es gilt weiter: $\|ag_0 + (1-a)\frac{z - bg_0}{1-b}\| = d(0, G) \quad (0 \leq a \leq 1)$

Daraus folgt: $\|ag_0 + (1-a)z - bg_0\| = (1-b)d(0, G) = d(bg_0, G)$

$(0 \leq a \leq 1)$ und $ag_0 + (1-a)z \in S(bg_0, d(bg_0, G)) \quad (0 \leq a \leq 1)$.

Damit ist (1) gezeigt.

(2) Wir zeigen nun: Für alle $0 < b < 1$ gilt

$$bg_0 \in A := \{x \in E \setminus G: g_0 \in P_G(x) \text{ und } [g_0, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))\}$$

Beweis von (2):

Für $0 < b < 1$ gilt: $bg_0 \in E \setminus G$, $g_0 \in P_G(bg_0)$ und

$$ag_0 + (1-a)f_G(bg_0) \in S(bg_0, d(bg_0, G)) \quad (0 \leq a \leq 1).$$

Letzteres zeigen wir so:

Zunächst gilt $f_G(bq_0)$ ist aus $S(bq_0, d(bq_0, G)) \cap S(0, d(0, G))$,
denn angenommen $\|f_G(bq_0)\| > d(0, G)$, so folgt:

$$\left\| \frac{f_G(bq_0) - bq_0}{1-b} \right\| \geq \frac{\|f_G(bq_0)\| - b\|q_0\|}{1-b} > d(0, G),$$

was ein Widerspruch zu $\|f_G(bq_0) - bq_0\| = d(bq_0, G) = (1-b)d(0, G)$ ist.

Aus (1) folgt nun: $aq_0 + (1-a)f_G(bq_0) \in S(bq_0, d(bq_0, G))$ ($0 \leq a \leq 1$).

Damit ist (2) gezeigt.

(3) Wir zeigen: $A := \{x \in E \setminus G: q_0 \in P_G(x) \text{ und } [q_0, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))\}$
ist abgeschlossen in $E \setminus G$.

Beweis von (3):

Sei $x \in E \setminus G$ und (x_n) eine Folge in A , die gegen x konvergiert.

Dann zeigen wir: $x \in A$.

(a) q_0 ist aus $P_G(x)$, denn es gilt: Sei n aus $\mathbb{N}$ und x_n aus A , dann ist q_0 aus $P_G(x_n)$, woraus folgt, daß q_0 aus $P_G(x)$ ist, da (x_n) gegen x konvergiert.

(b) Es ist $[q_0, f_G(x)]$ eine Teilmenge von $S(x, d(x, G))$, denn es gilt: Sei n aus $\mathbb{N}$ und x_n aus A , dann ist

$$\|aq_0 + (1-a)f_G(x_n) - x_n\| = d(x_n, G) \quad (0 \leq a \leq 1). \text{ Für } 0 \leq a \leq 1$$

zeigen wir: $\|aq_0 + (1-a)f_G(x) - x\| = d(x, G).$

Da (x_n) gegen x konvergiert und f_G stetig ist, gilt:

$aq_0 + (1-a)f_G(x_n) - x_n$ konvergiert gegen $aq_0 + (1-a)f_G(x) - x$.

Da die Abbildungen $x \rightarrow \|x\|$ und $x \rightarrow d(x, G)$ stetig sind,

folgt durch Grenzübergang von x_n zu x : $\|aq_0 + (1-a)f_G(x) - x\| = d(x, G)$

Aus (a) und (b) folgt, daß x aus A ist und damit ist (3) gezeigt

(4) Wir zeigen schließlich: $[q_0, f_G(0)] \subseteq S(0, d(0, G)).$

Beweis von (4):

Aus (2) folgt, daß bq_0 aus A ist für alle $0 < b < 1$ und

aus (3) folgt, daß A abgeschlossen ist in $E \setminus G$.

Daraus folgt, daß 0 aus A ist, da bq_0 aus $E \setminus G$ ist für alle $0 < b < 1$, woraus (4) folgt. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Wir haben also bisher Folgendes gezeigt:

Falls $G' \in E$ proximal ist, falls für G' ein stetiger Schnitt $f_{G'}$ für $P_{G'}$ existiert und O aus $E \setminus G'$ und

q'_O aus $P_{G'}(O)$ ist, dann gilt: $[q'_O, f_{G'}(O)] \subseteq S(O, d(O, G'))$.

Daraus folgt nun: Sei $G \in E$ proximal und existiere

ein stetiger Schnitt f_G für P_G und seien $O \neq x_O$ aus

$E \setminus G$ und q_O aus $P_G(x_O)$, dann zeigen wir: $[q_O, f_G(x_O)] \subseteq S(x_O, d(x_O, G))$.

Dazu definieren wir $G' := \{x_O - g : g \in G\}$. Dann ist O aus $E \setminus G'$ und außerdem ist G' proximal, denn es gilt:

Da G proximal ist, folgt: Für alle x aus E existiert

ein g_x aus G mit $\|x - g_x\| = \inf \{\|x - g\| : g \in G\}$.

Für x aus E definieren wir: $g'_x := x_O - g_{x_O - x} \in G'$

Daraus folgt: $\|x - g'_x\| = \|(x_O - x) - g_{x_O - x}\| = \inf \{\|(x_O - x) - g\| : g \in G\}$
 $= \inf \{\|x - g'\| : g' \in G'\}$, d.h. g'_x ist aus $P_{G'}(x)$.

Also ist G' proximal.

Wir definieren für alle x aus E : $f_{G'}(x) := x_O - f_G(x_O - x) \in G'$.

Dann ist für alle x aus E $f_{G'}(x)$ aus $P_{G'}(x)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \|x - f_{G'}(x)\| &= \|(x_O - x) - f_G(x_O - x)\| = \inf \{\|(x_O - x) - g\| : g \in G\} = \\ &= \inf \{\|x - g'\| : g' \in G'\}. \end{aligned}$$

Damit ist $f_{G'}$ ein stetiger Schnitt für $P_{G'}$.

Nach dem bisher Bewiesenen folgt nun:

Für alle g' aus $P_{G'}(O)$ ist $[g', f_{G'}(O)] \subseteq S(O, d(O, G'))$.

Weiter gilt q_O aus $P_G(x_O)$, woraus folgt: $\|O - (x_O - q_O)\| =$
 $= \inf \{\|x_O - g\| : g \in G\} = \inf \{\|O - g'\| : g' \in G'\},$

d.h. $x_O - q_O$ ist aus $P_{G'}(O)$.

Daraus folgt schließlich für alle $0 \leq a \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|a(x_O - q_O) + (1-a)f_{G'}(O)\| &= \|a(x_O - q_O) + (1-a)(x_O - f_G(x_O))\| = \\ &= d(O, G') = d(x_O, G), \text{ d.h. } \|x_O - (aq_O + (1-a)f_G(x_O))\| = d(x_O, G), \\ \text{d.h. } [q_O, f_G(x_O)] &\subseteq S(x_O, d(x_O, G)). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $[q, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))$ für alle $x \in E \setminus G$

und alle $q \in P_G(x)$.

Trivialerweise gilt: $[g, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))$ für alle $x \in G$ und alle $g \in P_G(x)$. Also gilt schließlich:

$$[g, f_G(x)] = S(x, d(x, G)) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und alle } g \in P_G(x).$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Aus Satz 2 ergibt sich schließlich folgendes Korollar:

3. Korollar:

Sei E ein strikt konvexer normierter Raum und G eine proximale Teilmenge von E . Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$. Dann ist G tschebyscheff.

Beweis:

Wir zeigen zunächst: Sei E strikt konvex und x_1, x_2 aus E , $r > 0$ und $\|x_1\| = r = \|x_2\|$, d.h. $\left\| \frac{x_1}{r} \right\| = 1 = \left\| \frac{x_2}{r} \right\|$, woraus folgt: $\left\| \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{r} + \frac{x_2}{r} \right) \right\| < 1$, d.h. $\left\| \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\| < r$.

Daraus folgt nun: Seien y_1, y_2 aus E , $R > 0$, y aus E und

$[y_1, y_2] \subseteq S(y, R)$, dann gilt $y_1 = y_2$, denn angenommen es ist $y_1 \neq y_2$. Dann folgt aus $\|y_1 - y\| = R = \|y_2 - y\|$:

$\left\| \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - y \right\| < R$, d.h. $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \notin S(y, R)$. Dies ist ein Widerspruch.

Schließlich ergibt sich nach Satz 2 unter der Voraussetzung des Korollars: $[g, f_G(x)] \subseteq S(x, d(x, G))$ für alle x aus E und alle g aus $P_G(x)$, woraus folgt: $P_G(x) = \{f_G(x)\}$ für alle x aus E , d.h. G ist tschebyscheff.

Damit ist Korollar 3 bewiesen.

Man ersieht also, daß in einem strikt konvexen Raum bei proximaler, nicht tschebyscheffscher Basismenge - und dies ist der einzig wichtige Fall für Schrittprobleme - kein stetiger Schnitt für die metrische Projektion existiert.

Damit haben wir der Nichtexistenzaussage von Lazar, Morris und Wulbert in [1] im Raum L_1 bei nichtatomarem Maßraum und endlich-dimensionaler Basismenge über stetige Schnitte für P_G

insbesondere eine Nichtexistenzaussage für die L^p -Räume ($1 < p < \infty$), ebenso wie etwa für die Hilberträume hinzugefügt.

Um ein weiteres Korollar formulieren zu können, benötigen wir die folgenden Begriffe:

4. Definition:

- (1) Ein normierter Raum heißt glatt genau dann, wenn für alle x aus E mit $\|x\| = 1$ genau ein f aus E' existiert mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = 1$.

Sei E ein metrischer Raum und G eine nicht leere Teilmenge von E .

- (2) G heißt approximativ-kompakt genau dann, wenn für alle x aus E und alle Folgen (g_n) in G , falls $d(x, g_n)$ gegen $d(x, G)$ konvergiert, ein g aus G und eine Teilfolge (g_{n_k}) von (g_n) existiert, die gegen g konvergiert.
- (3) G heißt beschränkt-kompakt, falls für alle x aus E und alle $r > 0$ die Menge $K'(x, r) \cap G$ relativ-kompakt ist. (Hierbei sei $K'(x, r)$ analog Definition 1 (3) für metrische Räume definiert.)

Es ist bekannt, daß jeder endlich-dimensionale Teilvektorraum eines normierten Raumes und jede kompakte, sowie jede beschränkt-kompakte, abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes approximativ-kompakt ist und daß die metrische Projektion bei einer approximativ-kompakten Basismenge im Tschebyscheff-Fall stetig ist. Außerdem ist jede approximativ-kompakte Basismenge proximal (Singer [1]).

Wir benötigen schließlich den folgenden Satz von Vlasov (siehe Singer [1], Theorem 2.2, S. 368).

5. Satz:

Sei E ein glatter Banachraum und G eine beschränkt-kompakte, tschebyscheffsche Teilmenge von E .

Dann ist G konvex.

Damit erhalten wir das folgende Korollar:

6. Korollar:

Sei E ein strikt konvexer, glatter Banachraum und G eine beschränkt-kompakte, abgeschlossene Teilmenge von E . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (1) Es existiert ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.
- (2) G ist tschebyscheff.
- (3) G ist konvex.

Beweis:

Wir zeigen, daß (2) aus (1) folgt:

Da jede beschränkt-kompakte, abgeschlossene Basismenge approximativ-kompakt und damit proximal ist, folgt (2) aus (1) unter Verwendung von Korollar 3.

(1) folgt aus (2), da für jede approximativ-kompakte Basismenge die Stetigkeit der metrischen Projektion folgt, falls der Tschebyscheff-Fall vorliegt.

(3) folgt aus (2) durch Verwendung von Satz 5.

(2) folgt aus (3), da in einem strikt konvexen Raum jede konvexe Menge semitschebyscheff ist.

Damit ist Korollar 6 bewiesen.

Brosowski und Deutsch bewiesen in [1] Korollar 3 und Korollar 6 für die Inner-Radial-Unterhalbstetigkeit von P_G anstelle der Existenz eines stetigen Schnittes für P_G .

Im folgenden Abschnitt zeigen wir eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte mit der Nulleigenschaft für die metrische Projektion im Raum $C(X)$.

Mit $C(X)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf X , wobei X ein kompakter topologischer Raum sei.

Zunächst benötigen wir die folgende Definition:

7. Definition:

Sei E ein normierter Raum, G eine proximale Teilmenge von E und $f_G: E \rightarrow G$ ein Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Wir sagen der Schnitt f_G besitzt die Nulleigenschaft genau dann, wenn $f_G(x)=0$ ist für alle x aus $P_G^{-1}(0)$, wobei $P_G^{-1}(0) := \{x \in E: 0 \in P_G(x)\}$ ist.

8. Bemerkung:

Die Nulleigenschaft stellt in gewisser Weise eine natürliche Bedingung an den Schnitt dar, insofern als man bei expliziter Angabe des Schnittes gerade diese Eigenschaft erhält, wenn man, was naheliegt, für alle x aus E definiert: $f_G(x)$ sei aus $P_G(x)$ so gewählt, daß $\|f_G(x)\| = \inf\{\|g\| : g \in P_G(x)\}$ gilt. Man vergleiche etwa die Beweise zu Theorem 4 (Brown [1]) und Theorem 2.1 (Lazar, Morris, Wulbert [1]).

Unter Verwendung einiger Lemmas aus Blatter, Morris, Wulbert [1] beweisen wir den folgenden Satz:

9. Satz:

Sei $E=C(X)$, wobei X ein kompakter Hausdorffraum ist, G ein proximaler Teilvektorraum von E und $\langle P_G(f) \rangle$ endlich-dimensional für alle f aus E . Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$ mit der Nulleigenschaft. Dann ist $Z(P_G(f))$ offen für alle f aus $P_G^{-1}(0)$.

($Z(P_G(f))$ ist dabei die folgende Menge: $Z(P_G(f)) := \{x \in X: g(x)=0 \text{ für alle } g \text{ aus } P_G(f)\}$.)

Beweis:

Angenommen es existiert ein h aus $P_G^{+1}(0)$, so daß $Z(P_G(h))$ offen ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\|h\| = 1$ sei. Dann existiert, da $\langle P_G(h) \rangle$ endlich-dimensional ist, ein p aus $P_G(h)$ und ein w aus $Rd(Z(P_G(h)))$, so daß für alle U aus $U(w)$ ein y aus U existiert mit $p(y) > 0$ und $h(w) \geq 0$. $p(y)$ kann als echt größer Null angenommen werden, da man nötigenfalls h durch $h-p$ ersetzen kann, denn es gilt: $0, -p$ ist aus $P_G(h-p)$ und $(h-p)(w) = h(w) - 0 = h(w)$ und $Z(P_G(h-p)) = Z(P_G(h))$.

Wir beweisen nun den Satz unter Verwendung der Lemmas 3 bis 8 zu Theorem 2 in Blatter, Morris, Wulbert [1].

Aus Lemma 3 folgt:

- (1) Es existiert ein $r > 0$ und ein q aus $P_G(h)$, so daß für alle t aus $P_G(h)$ ein U aus $U(w)$ existiert mit:
Ist $t \geq q$ auf U , dann folgt $\|t\| \geq r$.

Außerdem existiert eine Funktion h' aus E mit den folgenden Eigenschaften:

- (2) $h'(w) = 1$ und $\|h'\| = 1$ und $0, q$ ist aus $P_G(h')$.

Dies folgt aus Lemma 4. Aus Lemma 5 folgt:

- (3) Für alle k aus $P_G(h')$ mit $\|k\| \leq \frac{1}{2}$ ist k aus $P_G(h)$.

Es existiert weiter für alle n aus $\mathbb{N}$ eine Funktion q_n mit den Eigenschaften:

- (4) Für alle $n \geq 2$ und alle p aus $P_G(q_n)$ existiert ein:
 U aus $U(w)$ mit $p \geq q$ auf U .

Dies folgt aus Lemma 6, Aus Lemma 7 folgt:

- (5) (q_n) konvergiert gegen h' .

Aus Lemma 8 folgt:

- (6) Für alle n aus $\mathbb{N}$ und alle k aus $P_G(q_n)$ mit $\|k\| \leq \frac{1}{2}$ ist k aus $P_G(h')$.

Nun folgt der Rest des Beweises:

Sei f_G der nach Voraussetzung existierende stetige Schnitt für P_G , dann folgt aus (5), daß (q_n) gegen h' konvergiert und daraus, daß $(f_G(q_n))$ gegen $f_G(h')$ konvergiert.

Aus (2) folgt, daß h' aus $P_G^{-1}(0)$ ist und daraus nach Voraussetzung eines Schnittes mit der Nulleigenschaft, daß $f_G(h')$ gleich 0 ist. Also konvergiert $(f_G(q_n))$ gegen 0.

Daraus folgt, daß es ein $n_0 \geq 2$ gibt mit $\|f_G(q_{n_0})\| \leq \frac{1}{2}$ und $\|f_G(q_{n_0})\| < r$.

Aus (6) folgt, da $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(q_{n_0})$ und $\|f_G(q_{n_0})\| \leq \frac{1}{2}$ ist, daß $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(h')$ ist.

Aus (3) folgt, da $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(q_{n_0})$ und $\|f_G(q_{n_0})\| \leq \frac{1}{2}$ ist, daß $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(h)$ ist.

Aus (4) folgt, da $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(q_{n_0})$ und $n_0 \geq 2$ ist, daß ein U aus $U(w)$ existiert mit $f_G(q_{n_0}) \geq q$ auf U .

Schließlich folgt aus (1), da es ein U aus $U(w)$ gibt mit $f_G(q_{n_0}) \geq q$ auf U und da $f_G(q_{n_0})$ aus $P_G(h)$ ist, daß $\|f_G(q_{n_0})\| \geq r$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu $\|f_G(q_{n_0})\| < r$.

Damit ist Satz 9 bewiesen.

Für das Weitere benötigen wir die folgende Definition:

10. Definition:

Es seien E und G topologische Räume.

(1) Eine mengenwertige Abbildung $F: E \rightarrow 2^G$ heißt

oberhalb-stetig genau dann, wenn $\{x \in E: F(x) \cap G' \neq \emptyset\}$

abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G .

(2) Eine mengenwertige Abbildung $F: E \rightarrow 2^G$ heißt

unterhalb-stetig genau dann, wenn $\{x \in E: F(x) \cap G' \neq \emptyset\}$

offen ist für alle offenen Teilmengen G' von G .

Blatter, Morris und Wulbert haben in [1] Satz 9 unter

der Voraussetzung bewiesen, daß $P_G: E \rightarrow 2^G$ unterhalb-stetig sei, anstelle der Existenz eines stetigen Schnittes für $P_G: E \rightarrow 2^G$ mit der Nulleigenschaft, wie in Satz 9 vorausgesetzt wurde.

Ausformuliert lautet der Satz von Blatter, Morris und Wulbert so:

11. Satz:

Sei $E=C(X)$, wobei X ein kompakter Hausdorffraum ist, G ein proximaler Teilvektorraum von E und $\langle P_G(f) \rangle$ endlich-dimensional für alle f aus E . Dann gilt:

- (1) Falls P_G unterhalb-stetig ist, ist $Z(P_G(f))$ offen für alle f aus $P_G^{-1}(0)$.
- (2) Ist P_G oberhalb-stetig und $Z(P_G(f))$ offen für alle f aus $P_G^{-1}(0)$, so ist P_G unterhalb-stetig.

Für weitere Ergebnisse benötigen wir den folgenden Satz, der von Michael in [1] (Theorem 3.2'', S. 364) bewiesen wurde:

12. Satz:

Für einen Hausdorffraum sind äquivalent:

- (1) E ist parakompakt
- (2) Für alle Banachräume G und alle unterhalb-stetigen mengenwertigen Abbildungen $F: E \rightarrow 2^G$ mit der Eigenschaft, daß $F(x)$ abgeschlossen und konvex ist für alle x aus E , existiert ein stetiger Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$.

Damit beweisen wir nun den folgenden Satz:

13. Satz:

Sei $E=C(X)$, wobei X ein kompakter Hausdorffraum ist, G ein proximaler Teilvektorraum von E , $\langle P_G(f) \rangle$ endlich-dimensional für alle f aus E und sei $P_G: E \rightarrow 2^G$ oberhalb-stetig, dann gilt:

- (1) Falls P_G unterhalb-stetig ist, existiert ein stetiger Schnitt f_G für P_G .
- (2) Falls ein stetiger Schnitt f_G für P_G mit der Nulleigenschaft existiert, ist P_G unterhalb-stetig.

Beweis:

Wir beweisen zunächst Bedingung (1):

Da E ein Banachraum und G proximal, also abgeschlossen ist, ist E parakompakt und G ein Banachraum.

Da G abgeschlossen und konvex ist, ist $P_G(f)$ abgeschlossen und konvex für alle f aus E .

Daraus folgt mit der Unterhalb-Stetigkeit von P_G aus Satz 12, daß ein stetiger Schnitt f_G für P_G existiert.

Wir beweisen nun Bedingung (2):

Aus der Voraussetzung folgt nach Satz 9, daß $Z(P_G(f))$ offen ist für alle f aus $P_G^{-1}(0)$ und daraus folgt nach Satz 11 die Unterhalb-Stetigkeit von P_G .

Damit ist Satz 13 bewiesen.

Als Korollar ergibt sich:

14. Korollar:

Sei $E=C(X)$, wobei X ein kompakter Hausdorffraum ist und G ein endlich-dimensionaler Teilvektorraum von E . Dann gilt:

- (1) Falls $P_G: E \rightarrow 2^G$ unterhalb-stetig ist, existiert ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.
- (2) Falls ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$ mit der Nulleigenschaft existiert, ist $P_G: E \rightarrow 2^G$ unterhalb-stetig.

Beweis:

Aus der endlichen Dimension von G folgt, daß $\langle P_G(f) \rangle$ endlich-dimensional ist für alle f aus E und daß P_G oberhalb-stetig ist, da G approximativ-kompakt ist (siehe Singer [1], Theorem 3.1, S. 386)

Aus Satz 13 folgt nun die Aussage von Korollar 14.

15. Bemerkung:

Aus Michaels Schnittsatz (Satz 12) folgt unter gewissen Voraussetzungen, wie wir gesehen haben, aus der Unterhalb-Stetigkeit der metrischen Projektion die Existenz eines stetigen Schnittes für die metrische Projektion. Die Umkehrung ist im allgemeinen jedoch nicht richtig. Satz 12 und Korollar 13 zeigen, daß dies in bestimmten Fällen dann gilt, wenn es sich um einen Schnitt mit der Nulleigenschaft handelt.

16. Korollar zu Satz 9:

Sei $E=C(X)$, wobei X ein kompakter, zusammenhängender Hausdorffraum ist, G ein proximaler Teilvektorraum von E und $\langle P_G(f) \rangle$ endlich-dimensional für alle f aus E . Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$ mit der Nulleigenschaft. Dann ist G tschebyscheff.

Beweis:

Aus der Voraussetzung und Satz 9 folgt, daß $Z(P_G(f))$ offen ist für alle f aus $P_G^{-1}(0)$.

Außerdem ist für alle f aus $P_G^{-1}(0)$ und alle g aus $P_G(f)$ g stetig, woraus folgt, daß $Z(P_G(f))$ abgeschlossen ist für alle f aus $P_G^{-1}(0)$.

$Z(P_G(f))$ ist außerdem nicht leer für alle f aus $P_G^{-1}(0)$, denn es gilt: Sei f aus $P_G^{-1}(0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\|f\| = 1$ sei, da $Z(P_G(f)) = Z(P_G(\frac{f}{\|f\|}))$ ist. Daraus folgt nach Lemma 1 aus [3], daß $\emptyset \neq \text{supp}(L) \subseteq Z(P_G(f))$ ist, wobei L wie in diesem Lemma 1 ist.

Aus dem Obigem folgt nun, da X zusammenhängend ist, daß $Z(P_G(f)) = X$ ist für alle f aus $P_G^{-1}(0)$, d.h. $P_G(f) = \{0\}$ für alle f aus $P_G^{-1}(0)$, d.h. G ist tschebyscheff.

Damit ist Korollar 16 bewiesen.

Wir ersehen also, daß unter den Voraussetzungen von Korollar 16 im Fall, daß die Basismenge nicht tschebyscheff ist - und nur diese Situation ist für Schnittfragen interessant - kein stetiger Schnitt mit der Nulleigenschaft für die metrische Projektion existiert.

Lazar, Morris und Wulbert versuchten in [1] zu beweisen, daß unter stärkeren Voraussetzungen als in Korollar 16 bei nicht tschebyscheffscher Basismenge in $C(X)$ kein stetiger Schnitt für die metrische Projektion existiert. Brown gab allerdings in [1] ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage an. Wir haben daraufhin das Problem aufgeworfen, ob kein stetiger Schnitt mit der Nulleigenschaft existiert, und dies in einem allgemeineren Fall gelöst (Korollar 16).

Wie schon erwähnt bewiesen Lazar, Morris und Wulbert eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion im Raum L_1 bei nichtatomarem Maßraum und endlich-dimensionaler Basismenge. Es stellt sich das Problem, ob man derartige Nichtexistenzaussagen beweisen kann, falls man die Bedingung, daß der Maßraum nichtatomar ist, fallen läßt. Wir beweisen im nächsten Abschnitt eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion mit der Nulleigenschaft im Raum L_1 , wobei der Maßraum nicht notwendig nichtatomar ist, bei eindimensionaler Basismenge, gehen allerdings einen völlig anderen Weg als die oben erwähnten Autoren.

Dazu benötigen wir die folgenden Begriffe:

Sei (X, S, μ) ein σ -endlicher Maßraum mit positivem Maß μ . Unter $L_1(X, S, \mu)$ verstehen wir den Raum aller reellen μ -integrierbaren Funktionen auf X , wobei zwei Funktionen als identisch betrachtet werden, falls sie sich nur auf

einer Nullmenge unterscheiden. $L_1(X, S, u)$ sei versehen mit der üblichen Norm: $\|f\| := \int |f| du$ (f aus $L_1(X, S, u)$).

Unter $L_\infty(X, S, u)$ verstehen wir den Raum aller reellen meßbaren, u -fast überall beschränkten Funktionen auf X , wobei ebenfalls zwei Funktionen als identisch betrachtet werden, falls sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.

$L_\infty(X, S, u)$ sei ebenfalls versehen mit der üblichen Norm:

$\|f\| := \sup \{|f(x)| : x \in X \setminus N_f\}$, wobei N_f die Nullmenge ist, außerhalb der f beschränkt ist. Im Folgenden identifizieren wir stets den stetigen Dualraum von $L_1(X, S, u)$ mit $L_\infty(X, S, u)$.

Eine Menge aus S heißt Atom genau dann, wenn $0 < u(A) < \infty$ ist und für alle B aus S mit $B \subseteq A$ gilt: $u(B) = 0$ oder $u(B) = u(A)$.

Sei X eine Menge und f eine reelle Funktion auf X , dann verstehen wir unter $\text{supp}(f)$ die Menge $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$,

unter $Z(f)$ die Menge $\{x \in X : f(x) = 0\}$ und, falls f beschränkt ist, unter $S(f)$ die Menge $\{x \in X : |f(x)| < \sup \{|f(y)| : y \in X\}\}$.

Die obigen Mengen treten in Zusammenhang mit $L_1(X, S, u)$ und $L_\infty(X, S, u)$ auf und werden stets modulo Nullmengen interpretiert.

Für den folgenden Satz und das sich daraus ergebende

Korollar benötigen wir die beiden nachstehenden Sätze:

17. Satz:

Sei $E = L_1(X, S, u)$ und G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E . Dann ist G nicht tschebyscheff genau dann, wenn es ein f aus $G^\perp$ und ein $q \neq 0$ aus G gibt mit

$$\|f\| = 1 \text{ und } S(f) \subseteq Z(q).$$

(Unter $G^\perp$ verstehen wir die Menge $\{f \in E' : f(q) = 0 \text{ für alle } q \text{ aus } G\}$.)

18. Satz:

Sei E ein normierter Raum, G ein Teilvektorraum von E ,
 x aus $E \setminus \bar{G}$ und q_0 aus G . Dann ist q_0 aus $P_G(x)$ genau
dann, wenn es ein f aus $G^\perp$ gibt mit $\|f\| = 1$ und
 $f(x - q_0) = \|x - q_0\|$.

(siehe [23] Satz 1.1 S. 18)

Notwendige Bedingungen für stetige Schnitte der metrischen Projektion sind nur bekannt in Zusammenhang mit Charakterisierungen solcher Schnitte für eindimensionale Räume als Basismenge in den Räumen $C(X)$ und l_1 (siehe Lazar, Morris, Wulbert [1] und Lazar [1]). Wir geben eine notwendige Bedingung für stetige Schnitte der metrischen Projektion mit der Nulleigenschaft im Raum L_1 bei ebenfalls eindimensionaler Basismenge (Satz 19). Daraus folgt ein Korollar, das eine Nichtexistenzaussage für stetige Schnitte der metrischen Projektion mit der Nulleigenschaft im Raum L_1 darstellt (Korollar 20).

19. Satz:

Sei $E = L_1(X, S, u)$, wobei (X, S, u) ein σ -endlicher Maßraum sei, und G ein eindimensionaler Teilvektorraum von E , d.h. $G = \langle q_0 \rangle$ für ein q_0 aus G . Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$ mit der Nulleigenschaft. Dann existiert kein f aus $G^\perp$ mit $\|f\| = 1$, so daß $S(f) \subseteq Z(q_0)$ und $\text{supp}(q_0)$ nicht Vereinigung endlich vieler Atome ist.

Beweis:

Angenommen es existiert ein f aus $G^\perp$ mit $S(f) \subseteq Z(q_0)$ und $\|f\| = 1$ und $\text{supp}(q_0)$ ist nicht die Vereinigung endlich vieler Atome. Wir zeigen, daß kein stetiger Schnitt f_G für P_G mit der Nulleigenschaft existiert. Da $\text{supp}(q_0)$ nicht Vereinigung endlich vieler Atome ist,

existiert eine Folge von Mengen (E_m) mit den folgenden Eigenschaften: Für alle m aus $\mathbb{N}$ ist E_m aus S , $u(E_m) > 0$, $E_m \subseteq \text{supp}(g_0)$ und f_{g_0} besitzt konstantes Vorzeichen auf E_m und außerdem konvergiert die Folge $(u(E_m))$ gegen Null: Ersetzt man notfalls g_0 durch $-g_0$ und nimmt lediglich eine Teilfolge von (E_m) , so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $f_{g_0} < 0$ auf E_m ist für alle m aus $\mathbb{N}$.

Wir definieren nun die folgenden Funktionen aus $E=L_1(X,S,u)$:

$h := f|_{g_0}$ auf $X \setminus S(f)$ und $h := 0$ auf $S(f)$

$h_m := h$ auf $X \setminus E_m$ und $h_m := 0$ auf E_m (m aus $\mathbb{N}$)

$k_m := h$ auf $X \setminus E_m$ und $k_m := g_0$ auf E_m (m aus $\mathbb{N}$)

Dann gilt, da $(u(E_m))$ gegen Null konvergiert, daß sowohl die Folge (h_m) , als auch die Folge (k_m) , gegen h konvergiert.

Wir zeigen nun die beiden folgenden Behauptungen:

Behauptung 1: 0 ist aus $P_G(h_m)$ für alle m aus $\mathbb{N}$.

Behauptung 2: $P_G(k_m) \cap \{g \in G: \|g\| < \|g_0\|\} = \emptyset$ für alle m aus $\mathbb{N}$.

Daraus folgt dann, daß kein stetiger Schnitt f_G für P_G mit der Nulleigenschaft existiert.

Denn angenommen, es existiert solch ein Schnitt f_G , dann ist $f_G(h_m) = 0$ für alle m aus $\mathbb{N}$, da 0 aus $P_G(h_m)$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$, und daraus folgt, da f_G stetig ist, daß $f_G(h) = 0$ sein muß. Andererseits folgt $\|f_G(k_m)\| \geq \|g_0\|$ für alle m aus $\mathbb{N}$, da $P_G(k_m) \cap \{g \in G: \|g\| < \|g_0\|\} = \emptyset$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$, woraus folgt, daß die Folge $(f_G(k_m))$ nicht gegen $f_G(h) = 0$ konvergiert. Dies ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von f_G .

Wir geben nun den Beweis von Behauptung 1:

Wir zeigen, daß h_m aus $E \setminus \bar{G}$ und $f(h_m) = \|h_m\|$ ist für alle m aus $\mathbb{N}$.

Aus Satz 18 folgt dann, daß 0 aus $P_G(h_m)$ ist für alle m aus N .

Sei nun m aus N , dann gilt:

$$f(h_m) = \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} |g_0| \, du > 0$$

Denn wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit

annehmen, daß $u(\cup \{E_n: n \neq m\} \setminus E_m) > 0$ ist.

Aus der obigen Gleichung ergibt sich, da f aus $G^\perp$ ist, daß h_m aus $E \setminus \bar{G}$ ist.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f(h_m) &= \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} f \cdot f |g_0| \, du = \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} |g_0| \, du \\ \|h_m\| &= \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} |f| |g_0| \, du = \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} |g_0| \, du \end{aligned}$$

$$\text{Damit ist } f(h_m) = \|h_m\|.$$

Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Wir geben nun den Beweis von Behauptung 2:

Zunächst zeigen wir, daß q_0 aus $P_G(k_m)$ ist für alle m aus N .

Dazu zeigen wir, daß k_m aus $E \setminus \bar{G}$ und $f(k_m - q_0) = \|k_m - q_0\|$ ist für alle m aus N . Satz 18 liefert dann das Gewünschte.

Sei nun m aus N , dann gilt:

$$\begin{aligned} f(k_m) &= \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} (|q_0| - f q_0) \, du \geq \\ &\geq \int_{\cup \{E_n: n \neq m\} \setminus E_m} (|q_0| - f q_0) \, du = \int_{\cup \{E_n: n \neq m\} \setminus E_m} 2|q_0| \, du > 0. \end{aligned}$$

Dies gilt, da $S(f) \subseteq Z(q_0)$ und $f q_0 < 0$ auf allen E_m ist.

Daraus folgt, da f aus $G^\perp$ ist, daß k_m aus $E \setminus \bar{G}$ ist.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f(k_m - q_0) &= \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} f(|q_0| - q_0) \, du + \int_{S(f)} f(0 - q_0) \, du + \\ &+ \int_{E_m} f(q_0 - q_0) \, du = \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} (|q_0| - f q_0) \, du \end{aligned}$$

Dies gilt, da $S(f) \subseteq Z(q_0)$ ist.

$$\begin{aligned} \|k_m - q_0\| &= \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} |f| |q_0| - q_0| \, du + \int_{S(f)} |0 - q_0| \, du + \\ &+ \int_{E_m} |q_0 - q_0| \, du = \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} (|q_0| - f q_0) \, du \end{aligned}$$

Dies gilt, da $S(f) \subseteq Z(q_0)$ ist.

Damit ergibt sich: $f(k_m - q_0) = \|k_m - q_0\|$:

Sei nun m aus $\mathbb{N}$ und q aus G mit $\|q\| < \|q_0\|$, d.h. $q = a q_0$ für ein $0 \leq |a| < 1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|k_m - q_0\| &= \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} ||q_0| - f q_0| \, du = \\ &= \int_{(X \setminus (S(f) \cup E_m)) \cap \text{supp}(q_0)} |q_0| \, du + \int_{E_m} f q_0 \, du \end{aligned}$$

Dies gilt, da $\int_X f q_0 \, du = 0$ ist.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \|k_m - q\| &= \int_{X \setminus (S(f) \cup E_m)} |f| |q_0| - q| \, du + \int_{S(f)} |q| \, du + \\ \int_{E_m} |q_0 - q| \, du &= \int_{(X \setminus (S(f) \cup E_m)) \cap \text{supp}(q_0)} ||q_0| - f q| \, du + \\ \int_{E_m} |q_0 - q| \, du &= \int_{(X \setminus (S(f) \cup E_m)) \cap \text{supp}(q_0)} |q_0| \, du + \\ &+ \int_{E_m} f q \, du + \int_{E_m} |q_0 - q| \, du = \\ &= \int_{(X \setminus (S(f) \cup E_m)) \cap \text{supp}(q_0)} |q_0| \, du + \int_{E_m} a f q_0 \, du + \\ &+ \int_{E_m} (1-a) |q_0| \, du \end{aligned}$$

Da $f q_0 < 0$ auf E_m und $0 \leq |a| < 1$ ist, ergibt sich, daß $\|k_m - q_0\| < \|k_m - q\|$ ist.

Daraus folgt schließlich $P_G(k_m) \cap \{q \in G : \|q\| < \|q_0\|\} = \emptyset$.

Damit ist Satz 19 bewiesen.

Damit erhalten wir das folgende Korollar:

20. Korollar:

Sei $E = L_1(X, S, u)$, wobei (X, S, u) ein δ -endlicher Maßraum sei, und G ein eindimensionaler, nicht tschebyscheffscher Teilvektorraum von E , d.h. $G = \langle g_0 \rangle$ für ein g_0 aus G . $\text{supp}(g_0)$ sei nicht Vereinigung endlich vieler Atome.

Dann existiert kein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für

$P_G: E \rightarrow 2^G$ mit der Nulleigenschaft.

Beweis:

Das Korollar folgt unmittelbar aus Satz 17 und Satz 19.

§ 3. Fine Charakterisierung von stetigen Schnitten für die metrische Projektion

Zunächst geben wir die folgende Definition:

1. Definition:

Sei E ein normierter Raum und G ein Teilvektorraum von E .

(1) Die Menge $G^\perp := \{f \in E' : f(g) = 0 \text{ für alle } g \text{ aus } G\} \subseteq E'$
heißt Annihilator von G , wobei E' der Dualraum von E sei.

(2) $(G^\perp)_\perp$ bezeichne die folgende Teilmenge von E :

$$(G^\perp)_\perp := \{x \in E : f(x) = 0 \text{ für alle } f \text{ aus } G^\perp\}$$

(3) Für alle x aus E sei $\|x\|_{G^\perp} := \sup\{|f(x)| : f \in G^\perp, \|f\| \leq 1\}$

Bekannt sind die folgenden beiden Sätze:

2. Satz:

Sei E ein normierter Raum und G ein Teilvektorraum von E .

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(1) Es existiert ein stetiger Schnitt für $P_{G^\perp} : E' \rightarrow 2^{G^\perp}$.

(2) Es existiert ein stetiger Schnitt für die Hahn-Banach-
Abbildung $H : G' \rightarrow 2^{E'}$, definiert durch

$$H(g') := \{x' \in E' : x'|_G = g' \text{ und } \|x'\| = \|g'\|\} \quad (g' \in G').$$

3. Satz:

Sei E ein normierter Raum und G ein proximaler Teil-
vektorraum von E .

Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(1) Es existiert ein stetiger Schnitt für $P_G : E \rightarrow 2^G$.

(2) Es existiert ein stetiger Schnitt für die folgende
mengenwertige Abbildung: $V_G : E/G \rightarrow 2^{P_G^{-1}(0)}$,
definiert durch $V_G(x+G) := x - P_G(x) \quad (x+G \in E/G)$.

Die Sätze 2 und 3 sind in Deutsch, Pollul, Singer [1] angegeben.

Man sieht also, daß stetige Schnitte für die metrische
Projektion in Zusammenhang mit anderen mengenwertigen
Abbildungen charakterisiert werden können.

In diesem Rahmen beweisen wir den folgenden Satz 5 unter Verwendung des folgenden Lemmas:

4. Lemma:

Sei E ein normierter Raum, G ein Teilvektorraum von E , x aus $E \setminus \bar{G}$ und g_0 aus G . Dann ist g_0 aus $P_G(x)$ genau dann, wenn $\|x - g_0\|_{G^\perp} = \|x - g_0\|$ ist (siehe Singer [1]).

5. Satz:

Sei E ein normierter Raum und G ein proximaler Teilvektorraum von E . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (1) Es existiert ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.
- (2) Es existiert ein stetiger Schnitt $p: E \rightarrow E$ für die folgende mengenwertige Abbildung: $P: E \rightarrow 2^E$, definiert durch $P(x) := \{y \in E: f(y) = f(x) \text{ für alle } f \text{ aus } G^\perp \text{ und } \|y\| = \|x\|_{G^\perp}\}$

Wir bemerken, daß $P(x)$ nicht leer ist für alle x aus E (siehe Theorem 2.1 in Singer [1], S. 94).

Beweis:

Wir zeigen zunächst, daß aus (1) Bedingung (2) folgt:

Es existiere ein stetiger Schnitt f_G für P_G . Dann definieren wir: $p(x) := x - f_G(x)$ für alle x aus E .

Wir zeigen, daß $p(x)$ aus $P(x)$ ist für alle x aus E .

Sei nämlich x aus E , dann gilt, da $f_G(x)$ aus G ist:

$$f(p(x)) = f(x - f_G(x)) = f(x) \quad \text{für alle } f \text{ aus } G^\perp.$$

Sei weiter x aus $E \setminus G = E \setminus \bar{G}$, dann gilt nach Lemma 4:

$$\begin{aligned} \|p(x)\| &= \|x - f_G(x)\| = \|x - f_G(x)\|_{G^\perp} = \\ &= \sup \{ |f(x - f_G(x))| : f \in G^\perp \text{ und } \|f\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |f(x)| : f \in G^\perp \text{ und } \|f\| \leq 1 \} = \|x\|_{G^\perp}. \end{aligned}$$

Für x aus G gilt: $\|p(x)\| = \|x - f_G(x)\| = \|0\| = 0 = \|x\|_{G^\perp}$.

Also ist $f(p(x)) = f(x)$ für alle f aus $G^\perp$ und $\|p(x)\| = \|x\|_{G^\perp}$, d.h. $p(x)$ ist aus $P(x)$.

Außerdem ist $p: E \rightarrow E$ stetig, da $f_G: E \rightarrow G$ stetig ist.

Wir zeigen nun, daß aus (2) Bedingung (1) folgt:

Es existiere ein stetiger Schnitt p für P . Dann

definieren wir: $f_G(x) := x - p(x)$ für alle x aus E .

Wir zeigen, daß $f_G(x)$ aus $P_G(x)$ ist für alle x aus E .

Sei x aus $E \setminus G = E \setminus \bar{G}$ und f aus $G^\perp$, dann gilt:

$$f(p(x)) = f(x) \quad \text{und} \quad \|p(x)\| = \|x\|_{G^\perp}.$$

$$\text{Daraus folgt: } f(f_G(x)) = f(x - p(x)) = f(x) - f(p(x)) = 0,$$

$$\text{d.h. } f_G(x) \text{ ist aus } (G^\perp)^\perp = \bar{G} = G.$$

$$\text{Außerdem ist } \|x - f_G(x)\| = \|p(x)\| = \|x\|_{G^\perp} = \|x - f_G(x)\|_{G^\perp}$$

Aus Lemma 4 folgt dann, daß $f_G(x)$ aus $P_G(x)$ ist.

$$\text{Für } x \text{ aus } G \text{ gilt: } \|p(x)\| = \|x\|_{G^\perp} = 0, \text{ d.h. } p(x) = 0.$$

$$\text{Daraus folgt } f_G(x) = x - p(x) = x \in P_G(x) = \{x\}.$$

Also ist $f_G(x)$ aus $P_G(x)$.

Außerdem ist $f_G: E \rightarrow G$ stetig, da $p: E \rightarrow E$ stetig ist.

Damit ist Satz 5 bewiesen.

§ 4. Borel-meßbare Schnitte für die metrische Projektion

Da stetige Schnitte für die metrische Projektion nur unter starken Voraussetzungen zu erhalten sind und in manchen Fällen, wie wir gesehen haben, überhaupt nicht existieren, werfen wir die Frage auf, ob Borelmeßbare Schnitte (siehe Definition 1) unter schwächeren Bedingungen existieren.

Wie die folgenden Sätze zeigen, ist die Approximativ-Kompaktheit einer separablen Basismenge, als auch die δ -Kompaktheit einer proximalen, separablen Basismenge hinreichend. Ist die Basismenge proximal und separabel und ein Teilvektorraum und außerdem $P_G^{-1}(0)$ beschränkt-kompakt, so existieren ebenfalls Borelmeßbare Schnitte für die metrische Projektion.

Diese Ergebnisse erhält man durch Anwendung zweier allgemeiner Sätze über meßbare Schnitte (siehe Satz 2 und 3) von Himmelberg-van Vleck [1] .

Zunächst benötigen wir die folgende Definition:

1. Definition:

- (1) Sei E eine Menge mit δ -Algebra S_E und G eine Menge mit δ -Algebra S_G , dann heißt eine Abbildung $f: E \rightarrow G$ (S_E, S_G) -meßbar genau dann, wenn $f^{-1}(G')$ aus S_E ist für alle G' aus S_G .
- (2) Sei E ein topologischer Raum, dann bezeichnen wir mit B_E die von den abgeschlossenen Mengen in E erzeugte δ -Algebra und nennen sie Familie der Borelmengen in E .
- (3) Seien E und G topologische Räume, dann heißt eine Abbildung $f: E \rightarrow G$ Borel-meßbar genau dann, wenn f (B_E, B_G) -meßbar ist.

Nun formulieren wir die beiden oben erwähnten Schnittsätze von Himmelberg-van Vleck (siehe Theorem 5 und 3 in [1]).

2. Satz:

Sei E eine Menge mit σ -Algebra S , G ein separabler metrischer Raum und $F: E \rightarrow 2^G$ eine mengenwertige Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: $F(x)$ ist vollständig für alle x aus E und $\{x \in E: F(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ ist aus S für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G .

Dann existiert ein Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$ mit der Eigenschaft: $f^{-1}(G')$ ist aus S für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G .

3. Satz:

Sei E eine Menge mit σ -Ring S , G ein separabler metrischer Raum und $F: E \rightarrow 2^G$ eine mengenwertige Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: $F(x)$ ist abgeschlossen für alle x aus E und $\{x \in E: F(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ ist aus S für alle kompakten Teilmengen G' von G .

Dann existiert ein Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$ mit der Eigenschaft: $f^{-1}(G')$ ist aus S für alle kompakten Teilmengen G' von G .

Nun beweisen wir den ersten Satz über Borelmeßbare Schnitte für die metrische Projektion:

4. Satz:

Sei E ein metrischer Raum und G eine separable, approximativ-kompakte Teilmenge von E , dann existiert ein Borelmeßbarer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

G ist nach Voraussetzung approximativ-kompakt also proximal und damit abgeschlossen. Aus der Proximalität von G folgt, daß $P_G(x)$ aus 2^G ist für alle x aus E .

Wir zeigen nun, daß $P_G(x)$ kompakt, also vollständig ist für alle x aus E . Sei ein x aus E gegeben. Dann ist $P_G(x)$ abgeschlossen, was aus der Abgeschlossenheit von G folgt.

Außerdem ist $P_G(x)$ folgenkompakt, denn es gilt:

Sei $(g_n) \subseteq P_G(x)$, dann ist $d(x, g_n) = d(x, G)$ und daraus folgt, da G approximativ-kompakt ist: es existiert ein $g \in G$ und eine Teilfolge (g_{n_k}) von (g_n) , welche gegen g konvergiert. Damit haben wir die Kompaktheit von $P_G(x)$ gezeigt.

Aus Theorem 3.1 (Singer [1]) folgt, da G approximativ-kompakt ist, daß $\{x \in E: P_G(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ abgeschlossen, also aus B_E ist für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G .

Wendet man nun Satz 2 an und beachtet, daß G separabel ist, dann gilt: es existiert ein Schnitt f_G für P_G mit der Eigenschaft: $f_G^{-1}(G')$ ist aus B_E für alle abgeschlossenen Teilmengen G' von G . Da die abgeschlossenen Mengen in G die σ -Algebra B_G erzeugen, gilt schließlich:

$f_G^{-1}(G')$ ist aus B_E für alle G' aus B_G , d.h. f_G ist Borelmeßbar. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Der zweite Satz über Borelmeßbare Schnitte für die metrische Projektion lautet folgendermaßen:

5. Satz:

Sei E ein normierter Raum, G ein proximaler, separabler Teilvektorraum von E und $P_G^{-1}(0)$ beschränkt-kompakt.

Dann existiert ein Borelmeßbarer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Da G proximal ist, folgt: $P_G(x)$ ist aus 2^G für alle x aus E .

Da außerdem $P_G^{-1}(0)$ beschränkt-kompakt und G ein proximaler Teilvektorraum ist, folgt aus Theorem 2 in Morris [1]:

$P_G(x)$ ist kompakt, also vollständig für alle x aus E .

Außerdem folgt aus diesem Theorem, daß $\{x \in E: P_G(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ abgeschlossen, also aus B_E ist für alle abgeschlossenen Teilmengen G' aus G .

Wir bemerken, daß Theorem 2 in Morris [1] nur für Teilvektorräume endlicher Kodimension formuliert ist; die Aussage, die wir benötigen, gilt jedoch auch ohne die Voraussetzung der endlichen Kodimension.

Wendet man nun Satz 2 an und beachtet, daß G separabel ist, dann gilt: es existiert ein Schnitt f_G für P_G mit der Eigenschaft: $f_G^{-1}(G')$ ist aus B_E für alle abgeschlossenen Teilmengen G' aus G . Da die abgeschlossenen Mengen in G die σ -Algebra B_G erzeugen, gilt schließlich: $f_G^{-1}(G')$ ist aus B_E für alle G' aus B_G , d.h. f_G ist Borelmeßbar. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Für den nächsten Satz benötigen wir die folgende Definition:

6. Definition:

Sei G ein topologischer Raum, dann bezeichnen wir mit K_G den von den kompakten Mengen in G erzeugten σ -Ring.

7. Satz:

Sei E ein metrischer Raum und G eine proximale, separable Teilmenge von E . Dann existiert ein (B_E, K_G) -meßbarer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Da G proximal ist, ist $P_G(x)$ aus 2^G für alle x aus E . Aus der Proximalität von G folgt weiter, daß G abgeschlossen ist und daraus, daß $P_G(x)$ abgeschlossen ist für alle x aus E .

Wir zeigen nun, daß $\{x \in E: P_G(x) \cap G' \neq \emptyset\}$ abgeschlossen, also aus B_E ist für alle kompakten Teilmengen G' aus G . Sei nämlich $G' \in K_G$ kompakt und $M := \{x \in E: P_G(x) \cap G' \neq \emptyset\}$.

Sei weiter x aus E und (x_n) eine Folge in M , die gegen x konvergiert. Dann existiert eine Folge (q_n) in G mit $q_n \in P_G(x_n) \cap G'$. Da G' kompakt ist, gilt: es existiert ein q_0 aus G' und eine Teilfolge (q_{n_k}) von (q_n) , die gegen q_0 konvergiert.

Wir zeigen: q_0 ist aus $P_G(x)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} d(x, G) &= d(x, q_0) \leq d(x, q_{n_k}) + d(q_{n_k}, q_0) \leq d(x, x_{n_k}) + \\ &+ d(x_{n_k}, q_{n_k}) + d(q_{n_k}, q_0) = d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, G) + d(q_{n_k}, q_0) \\ &\leq 2d(x, x_{n_k}) + d(x, G) + d(q_{n_k}, q_0). \end{aligned}$$

Da (x_{n_k}) gegen x und (q_{n_k}) gegen q_0 konvergiert, folgt $d(x, q_0) = d(x, G)$ und daraus, da $q_0 \in G' \subseteq G$ ist, daß q_0 aus $P_G(x)$ ist. Daraus folgt $P_G(x) \cap G' \neq \emptyset$, d.h. x ist aus M . Wendet man nun Satz 3 an und beachtet, daß G separabel ist, so gilt: es existiert ein Schnitt f_G für P_G mit der Eigenschaft: $f_G^{-1}(G')$ ist aus B_E für alle kompakten Teilmengen G' von G . Daraus folgt, da die kompakten Mengen in G den σ -Ring K_G erzeugen, daß $f_G^{-1}(G')$ aus B_E ist für alle G' aus K_G . Damit ist f_G (B_E, K_G) -meßbar und Satz 7 bewiesen.

Aus Satz 7 ergibt sich folgendes Korollar:

8. Korollar:

Sei E ein metrischer Raum und G eine proximale, separable und σ -kompakte Teilmenge von E .

Dann existiert ein Borel-meßbarer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Da G σ -kompakt ist, folgt $B_G = K_G$.

Aus Satz 7 folgt dann die Existenz eines (B_E, B_G) -meßbaren Schnittes $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$. Das heißt aber gerade, daß f_G Borel-meßbar ist.

Damit ist Korollar 8 bewiesen.

9. Bemerkung:

Singer hat in [1] bewiesen, daß, falls G ein proximaler Teilvektorraum eines normierten Raumes ist, aus der Oberhalb-Stetigkeit von $P_G: E \rightarrow 2^G$ folgt, daß $P_G(x)$ kompakt ist für alle x aus E .

Mit dieser Aussage kann man völlig analog zu dem Beweis von Satz 5 zeigen, daß, falls G ein proximaler, separabler Teilvektorraum eines normierten Raumes ist, aus der Oberhalb-Stetigkeit von $P_G: E \rightarrow 2^G$ folgt, daß ein Borel-meßbarer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$ existiert.

§5. Quasi-additive, homogene Schnitte und Schnitte
mit der Sonneneigenschaft für die metrische Projektion

Wie wir gesehen haben, existieren Borel-meßbare Schnitte für P_G bereits bei schwachen Kompaktheitseigenschaften der Basismenge G . Es stellt sich somit die Frage, welche Schnitteigenschaften P_G besitzt, falls keinerlei Kompaktheitsforderungen an G gestellt werden. Wir beweisen drei allgemeine Schnittsätze, die, angewandt auf die metrische Projektion, zeigen, daß bei proximalem Teilvektorraum G ein homogener und ein quasi-additiver Schnitt existieren und bei einem proximalen Kegel G mit Scheitel in O ein positiv-homogener Schnitt existiert. Die Homogenität und Quasi-Additivität gehen bei Kegeln jedoch verloren.

1. Satz:

Seien E und G K -Vektorräume und $F: E \rightarrow 2^G$ eine homogene mengenwertige Abbildung. Dann existiert ein homogener Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

- (1) Wir definieren für $x, y \in E$: $x \sim y$ genau dann, wenn $x = ay$ für ein $0 \neq a \in K$. $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf E , denn es gilt: $1 \in K$ und $(x=ay \text{ genau dann, wenn } y=\frac{1}{a}x)$ und (aus $x=ay, y=bz$ folgt $x=abz$).
- (2) Den Schnitt f definieren wir folgendermaßen:
Sei A eine $\sim$ -Äquivalenzklasse in E . Wir wählen einen beliebigen Repräsentanten x aus A und ein beliebiges Element $q_0 \in F(x)$. Dann definieren wir:
 $f(x) := q_0$. Sei nun $y \in A$, dann gilt $y = ax$ für ein $0 \neq a \in K$.
Wir definieren: $f(y) := af(x)$. Da O aus $F(O)$ ist nach

Voraussetzung, definieren wir $f(0) := 0$.

$f: E \rightarrow G$ ist wohldefiniert, da $\sim$ eine Zerlegung von E in disjunkte Äquivalenzklassen bewirkt.

(3) f ist ein Schnitt für F , denn es gilt:

Sei y aus A wie in (2) mit der Darstellung $y = ax$

$(0 \neq a \in K)$. Dann ist $f(y) = af(x) \in aF(x) = F(ax) = F(y)$.

Außerdem ist $f(0) = 0 \in F(0)$.

(4) f ist homogen, denn es gilt:

(a) Sei $y \in E$ und $0 \neq a' \in K$. Dann liegt y in genau einer Äquivalenzklasse A mit wie in (2) gewähltem Repräsentanten x , d.h. $y = ax$ für ein $0 \neq a \in K$.

Daraus folgt $f(a'y) = f(aa'x) = a'af(x) = a'f(ax) = a'f(y)$

(b) Sei $y \in E$ und $a=0$. Dann gilt $f(a'y) = f(0) = 0 = a'f(y)$.
Damit ist Satz 1 bewiesen.

2. Bemerkung:

In Satz 1 genügt es, wie man aus dem Beweis sofort ersieht, zu fordern, daß $aF(x) \subseteq F(ax)$ für alle $x \in E$ und alle $a \in K$ sei, anstelle der Homogenität der mengenwertigen Abbildung.

Aus Satz 1 folgt sofort unter Verwendung von Satz 3 aus Abschnitt 1 das folgende Ergebnis für die metrische Projektion:

3. Korollar:

Sei E ein normierter Raum und G ein proximaler Teilvektorraum von E . Dann existiert ein homogener Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Für quasi-additive Schnitte beweisen wir den folgenden Satz:

4. Satz:

Sei E ein K -Vektorraum, G ein Teilvektorraum von E und $F: E \rightarrow 2^G$ eine quasi-additive mengenwertige Abbildung mit Fixpunktmenge G . Dann existiert ein quasi-additiver Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

(1) Wir definieren eine wohlbekannte Äquivalenzrelation:

Für $x, y \in E$ sei $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in G$ ist.

- (2) Den Schnitt f definieren wir folgendermaßen:

Sei A eine $\sim$ -Äquivalenzklasse in E . Wir wählen einen beliebigen Repräsentanten x aus A und außerdem ein beliebiges Element g_0 aus $F(x)$. Dann definieren wir:
 $f(x) := g_0$. Jedes y aus A hat eine Darstellung $y = x + g$ ($g \in G$).
 Für y definieren wir $f(y) := f(x) + g$. f ist wohldefiniert, da $\sim$ eine Zerlegung von E in disjunkte Äquivalenzklassen bewirkt.

- (3) f ist ein Schnitt für F , denn es gilt:

Sei y aus A mit der Darstellung $y = x + g$ ($g \in G$). Dann ist $f(y) = f(x) + g \in F(x) + g = F(x) + F(g) = F(x+g) = F(y)$.

- (4) f ist quasi-additiv, denn es gilt:

Sei $y \in E$ und $g' \in G$. Dann liegt y in genau einer Äquivalenzklasse A mit wie in (2) gewähltem Repräsentanten x , d.h. $y = x + g$ für ein $g \in G$. Dann gilt: $f(y+g') = f(x+g+g') = f(x) + g + g' = f(x+g) + g' = f(y) + g' = f(y) + f(g')$.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

5. Bemerkung:

In Satz 4 genügt es, wie man sofort aus dem Beweis ersieht, zu fordern, daß $F(x) + F(g) \subseteq F(x+g)$ für alle $x \in E$ und alle $g \in G$ sei, anstelle der Quasi-Additivität der mengenwertigen Abbildung.

Aus Satz 4 folgt sofort unter Verwendung von Satz 3 aus Abschnitt 1 das folgende Ergebnis für die metrische Projektion:

6. Korollar:

Sei E ein normierter Raum und G ein proximaler Teilvektorraum. Dann existiert ein quasi-additiver Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Geht man zu Kegeln mit Scheitel in O über, so beweisen wir das folgende Ergebnis über positiv-homogene Schnitte:

7. Satz:

Seien E und G beliebige Kegel mit Scheitel in O und $F: E \rightarrow 2^G$ eine positiv-homogene mengenwertige Abbildung. Dann existiert ein positiv-homogener Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

(1) Wir definieren für $x, y \in E$: $x \sim y$ genau dann, wenn $x = ay$ für ein $a > 0$. $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf E , denn es gilt: $1 > 0$ und $(x = ay$ genau dann, wenn $y = \frac{1}{a}x)$ und (aus $x = ay$ und $y = bz$ folgt $x = abz$).

(2) Den Schnitt f definieren wir folgendermaßen:

Sei A eine $\sim$ -Äquivalenzklasse in E . Wir wählen einen beliebigen Repräsentanten aus A und ein beliebiges Element g_0 aus $F(x)$. Dann definieren wir $f(x) := g_0$. Sei nun y aus A , dann gilt $y = ax$ für ein $a > 0$. Wir definieren $f(y) := af(x)$. Da O aus $F(O)$ ist nach Voraussetzung, setzen wir $f(O) := O$. $f: E \rightarrow G$ ist wohldefiniert, da $\sim$ eine Zerlegung von E in disjunkte Äquivalenzklassen bewirkt.

(3) f ist ein Schnitt für F , denn es gilt:

Sei y aus A wie in (2) mit der Darstellung $y = ax$ ($a > 0$). Dann ist $f(y) = af(x) \in aF(x) = F(ax) = F(y)$. Außerdem ist $f(O) = O \in F(O)$.

(4) f ist positiv-homogen, denn es gilt:

(a) Sei $y \in E$ und $a' > 0$. Dann liegt y in genau einer Äquivalenzklasse A mit wie in (2) gewähltem Repräsentanten x , d.h. $y = ax$ für ein $a > 0$.

Daraus folgt: $f(a'y) = f(a'ax) = a'af(x) = a'f(ax) = a'f(y)$.

(b) Sei $y \in E$ und $a = 0$. Dann gilt: $f(ay) = f(O) = O = a'f(y)$.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

8. Bemerkung:

In Satz 7 genügt es, wie man aus dem Beweis sofort ersieht, zu fordern, daß $aF(x) \subseteq F(ax)$ für alle $x \in E$ und alle $a \geq 0$ sei, anstelle der Positiv-Homogenität der mengenwertigen Abbildung.

Durch Anwendung von Satz 7 erhalten wir das folgende Ergebnis über die metrische Projektion:

9. Korollar:

Sei E ein normierter Raum, G ein proximaler Kegel in E mit Scheitel in O . Dann existiert ein positiv-homogener Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst die folgende Aussage:

$aP_G(x) = P_G(ax)$ für alle $x \in E$ und alle $a \geq 0$

Die Aussage ist klar für $x \in E$ und $a=0$.

Sei nun $x \in E$ und $a > 0$, dann gilt:

Ist $g_0 \in P_G(ax)$, so folgt: $\|ax - g_0\| = \inf\{\|ax - g\| : g \in G\}$.

Daraus folgt: $a\|x - \frac{1}{a}g_0\| = a \inf\{\|x - \frac{1}{a}g\| : g \in G\} =$

$= a \inf\{\|x - g\| : g \in G\}$. Damit ergibt sich: $\frac{1}{a}g_0 \in P_G(x)$,

also $g_0 \in aP_G(x)$. Die umgekehrte Enthaltenseinsrelation ergibt sich analog.

Durch Anwendung von Satz 3 aus Abschnitt 1 ist

Korollar 9 bewiesen.

10. Bemerkung:

Unter der Voraussetzung von Satz 7 und Korollar 9 existiert kein homogener und auch kein quasi-additiver Schnitt, nicht einmal, falls E ein Hilbertraum und G ein proximaler konvexer Kegel mit Scheitel in O ist. Dies ist, wie man leicht zeigt anhand von Beispielen, schon in den einfachsten Fällen für $E := \mathbb{R}^2$ nicht mehr erfüllt.

Betrachtet man Satz 1 und Satz 4, so stellt sich sofort die Frage, ob es möglich ist unter der Voraussetzung der Quasi-Linearität einer mengenwertigen Abbildung einen quasi-linearen Schnitt für diese Abbildung zu bekommen. Die Methoden der Äquivalenzklassenzerlegung aus den Beweisen zu Satz 1 und 4 versagen.

Betrachtet man jedoch einen endlich-dimensionalen Teilvektorraum G eines normierten Raumes E bei der mengenwertigen Abbildung $F: E \rightarrow 2^G$ und verwendet eine völlig andere Methode bei der Wahl des Schnittes, so erhält man - grob gesprochen - die erwartete Aussage, ja sogar noch mehr, wie der später folgende Satz 14 zeigen wird.

Dieser Satz 14 steht außerdem noch in einem anderen Zusammenhang. Brosowski und Deutsch führen in [1] den Begriff der Inner- und Außer-Radial-Unterhalb-Stetigkeit der metrischen Projektion ein. Grob formuliert, versteht man darunter die Unterhalb-Stetigkeit der metrischen Projektion bzgl. gewisser "Strecken".

In Analogie dazu definieren wir für beliebige mengenwertige Abbildungen den Begriff des radial-stetigen Schnittes für beliebige mengenwertige Abbildungen:

11. Definition:

Seien E und G normierte Räume und $F: E \rightarrow 2^G$ eine mengenwertige Abbildung. Ein Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$ heißt radial-stetig genau dann, wenn für jedes $x \in E$ und jede Folge $(x_n) \subseteq \{f(x) + a(x-f(x)) : a \in \mathbb{K}\}$ mit $x_n \rightarrow x$ gilt: $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Ein schärferer Begriff ergibt sich durch die folgende Überlegung: Efimov und Steckin führen in [1] den Begriff der Sonne ein, der sich als ziemlich wichtig für die Approximationstheorie erwiesen hat:

12. Definition:

Sei E ein normierter Raum und G eine Teilmenge von E .

G heißt Sonne genau dann, wenn für alle $x \in E$ und alle $g_0 \in P_G(x)$

gilt: $g_0 \in P_G(y)$ für alle $y \in \{g_0 + a(x - g_0) : a \geq 0\}$.

Es ist bekannt, daß jede konvexe Menge eine Sonne ist.

Aus Satz 3 in Abschnitt 1 folgt sofort, daß für jeden proximalen Teilvektorraum gilt: Für alle $x \in E$ und alle $g_0 \in P_G(x)$ gilt: $g_0 \in P_G(y)$ für alle $y \in \{g_0 + a(x - g_0) : a \in \mathbb{K}\}$.

Liegt nun ein tschebyscheffscher Teilvektorraum G als Basismenge vor und ist $f_G: E \rightarrow G$ die punktwertige metrische Projektion, so gilt also: für alle $x \in E$ und alle $y \in \{f_G(x) + a(x - f_G(x)) : a \in \mathbb{K}\}$ ist $f_G(x) = f_G(y)$. Damit stellt sich das Problem, ob im mengenwertigen Fall ein Schnitt f_G für P_G mit dieser Eigenschaft existiert.

Dazu definieren wir für beliebige mengenwertige Abbildungen:

13. Definition:

Seien E und G normierte Räume und $F: E \rightarrow 2^G$ eine beliebige mengenwertige Abbildung. Ein Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$ besitzt die Sonneneigenschaft genau dann, wenn für alle $x \in E$ und alle $y \in \{f(x) + a(x - f(x)) : a \in \mathbb{K}\}$ gilt $f(x) = f(y)$.

Der folgende allgemeine Schnittsatz ergibt schließlich, daß die Frage nach quasi-linearen, radial-stetigen Schnitten, ja sogar nach quasi-linearen Schnitten mit der Sonneneigenschaft, die wir oben gestellt haben, positiv beantwortet werden kann.

14. Satz:

Sei E ein normierter Raum, G ein endlich-dimensionaler Teilvektorraum von E und $F: E \rightarrow 2^G$ eine quasi-lineare mengenwertige Abbildung mit G als Fixpunktmenge.

Außerdem sei $F(x)$ abgeschlossen und konvex für alle x aus E . Dann existiert ein quasi-linearer Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $F: E \rightarrow 2^G$ mit der Sonneneigenschaft.

Beweis:

Da G endlich-dimensional ist, existiert eine zur gegebenen Norm $\|\cdot\|$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_1$ auf E , welche strikt konvex ist (siehe Köthe [1]). Da $F(x)$ abgeschlossen und konvex ist für alle x aus E , ist $x - F(x)$ abgeschlossen und konvex für alle x aus E . Man weiß, daß in jedem strikt konvexen Raum jede abgeschlossen konvexe Menge semitschebyscheff ist. Daraus folgt nun in unserem Fall: Für alle $x \in E$ gibt es genau ein $y_x \in x - F(x)$ mit $\|y_x\|_1 = \min\{\|y\|_1 : y \in x - F(x)\}$. Die Existenz von y_x für $x \in E$ folgt aus der Tatsache, daß G endlich-dimensional ist.

Wir definieren für alle $x \in E$ $f(x) := x - y_x \in F(x)$.

Wir zeigen nun:

(1) f ist homogen.

Seien x aus E und a aus K , dann gilt:

$ay_x \in a(x - F(x)) = ax - F(ax)$ Dies folgt aus der Homogenität von F .

Weiter gilt: $\min\{\|y\|_1 : y \in ax - F(ax)\} = \min\{\|ay_x\|_1 : y \in x - F(x)\} =$
 $= |a| \cdot \min\{\|y\|_1 : y \in x - F(x)\} = |a| \cdot \|y_x\|_1 = \|ay_x\|_1.$

Da die Wahl des Schnittes eindeutig ist, folgt: $y_{ax} = ay_x$

Daraus folgt: $f(ax) = ax - y_{ax} = ax - ay_x = a(x - y_x) = af(x).$

(2) f ist quasi-additiv.

Seien x aus E und q aus G , dann gilt:

$y_x \in x - F(x) = x + q - (F(x) + q) = x + q - F(x + q)$. Dies folgt aus der Quasi-Additivität von F .

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt: } \min\{\|y\|_1 : y \in x+g-F(x+g)\} &= \\ \min\{\|y\|_1 : y \in x+g-F(x)-F(g)\} &= \min\{\|y\|_1 : y \in x+g-F(x)-g\} \\ &= \min\{\|y\|_1 : y \in x-F(x)\} = \|y_x\|_1. \end{aligned}$$

Da die Wahl des Schnittes eindeutig ist, folgt $y_{x+g} = y_x$.

Daraus folgt $x+g-f(x+g) = x-f(x)$, also

$$f(x+g) = f(x) + g = f(x) + f(g).$$

Aus (1) und (2) folgt die Quasi-Linearität des Schnittes $f: E \rightarrow G$.

(3) Der Schnitt $f: E \rightarrow G$ besitzt die Sonneneigenschaft.

Seien x aus E und $y = f(x) + a(x-f(x))$, wobei a aus K ist.

Da F quasi-linear und G Fixpunktmenge von F ist, gilt:

$$ay_x \in f(x) + a(x-f(x)) - F(f(x) + a(x-f(x))), \text{ denn es ist:}$$

$$\begin{aligned} f(x) + a(x-f(x)) - F(f(x) + a(x-f(x))) &= f(x) + a(x-f(x)) - F(f(x)) - \\ &- aF(x) + aF(f(x)) = f(x) + a(x-f(x)) - f(x) - aF(x) + af(x) = ax - F(ax) = \\ &= a(x - F(x)). \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \min\{\|y\|_1 : y \in f(x) + a(x-f(x)) - F(f(x) + a(x-f(x)))\} &= \\ = \min\{\|y\|_1 : ax - aF(x)\} &= |a| \cdot \min\{\|y\|_1 : x - F(x)\} = \\ = |a| \cdot \|y_x\|_1 &= \|ay_x\|_1. \end{aligned}$$

Da die Wahl des Schnittes eindeutig ist, folgt

$$\begin{aligned} yf(x) + a(x-f(x)) &= ay_x, \text{ also } f(x) + a(x-f(x)) + f(f(x) + a(x-f(x))) = \\ &= ax - af(x) \text{ und somit } f(y) = f(x). \end{aligned}$$

Damit ist Satz 14 bewiesen.

15. Bemerkung:

Natürlich existiert unter der Voraussetzung von Satz 14 ein quasi-linearer, radial-stetiger Schnitt, da jeder Schnitt mit der Sonneneigenschaft radial-stetig ist, was unmittelbar aus der Definition solcher Schnitte folgt.

Aus Satz 14 folgt sofort unter Verwendung von Satz 3 aus Abschnitt 1 das folgende Ergebnis für die metrische Projektion:

16. Satz:

Sei E ein normierter Raum und G ein endlich-dimensionaler Teilvektorraum von E . Dann existiert ein quasi-linearer Schnitt $f: E \rightarrow G$ für $P: E \rightarrow 2^G$ mit der Sonneneigenschaft.

§ 6. Lineare Schnitte für die λ -metrische Projektion

Zunächst definieren wir den Begriff der λ -metrischen Projektion, der eine Verallgemeinerung des Begriffes der metrischen Projektion darstellt.

1. Definition:

Sei E ein metrischer Raum, G eine nicht leere Teilmenge von E und $\lambda \geq 1$. Für alle x aus E sei

$P_G^\lambda(x) := \{g_0 \in G : d(x, g_0) \leq \lambda d(x, G)\}$. Ist für alle x aus E die Menge $P_G^\lambda(x) \neq \emptyset$, so heißt die oben definierte Abbildung $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$ die λ -metrische Projektion bzgl. G .

Für $\lambda = 1$ erhält man die metrische Projektion.

Für die λ -metrische Projektion gilt die folgende Aussage:

2. Lemma:

Sei E ein metrischer Raum, G eine nicht leere Teilmenge von E und $\lambda > 1$. Dann ist für alle x aus E $P_G^\lambda(x)$ nicht leer.

Beweis:

Zunächst zeigen wir: $P_G^\lambda(x) = G \cap K'(x, \lambda d(x, G))$ für alle x aus E .

Die Relation " $\subseteq$ " ist klar.

Sei nun $g \in G \cap K'(x, \lambda d(x, G))$, dann gilt: $g \in G$ und $d(x, g) \leq \lambda d(x, G)$, woraus folgt: $g \in P_G^\lambda(x)$.

Angenommen es existiere ein $x \in E$ mit $P_G^\lambda(x) = \emptyset$, dann ist $G \cap K'(x, \lambda d(x, G)) = \emptyset$, d.h. $d(x, g) > \lambda d(x, G)$ für alle $g \in G$. Daraus folgt: $\inf\{d(x, g) : g \in G\} \geq \lambda d(x, G)$. Dies ist ein Widerspruch zu $\lambda > 1$.

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Im folgenden untersuchen wir die Frage, wann lineare Schnitte für die λ -metrische Projektion existieren.

Der erste Satz macht Aussagen über lineare Schnitte für die λ -metrische Projektion auf endlich-kodimensionale Teilvektorräume.

3. Satz:

Sei E ein normierter Raum und G ein proximaler Teilvektorraum von E mit $\dim E/G = n$.

Dann existiert ein linearer Schnitt $f_G^n: E \rightarrow G$ für $P_G^n: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Sei $\dim E/G = n$, dann existiert nach Auerbachs Lemma für alle $1 \leq i \leq n$ ein $x_i + G \in E/G$ und ein $F_i \in (E/G)'$ mit $d(x_i, G) = 1$, $\|F_i\| = 1$ und $F_i(x_j + G) = \delta_{ij}$ ($1 \leq j \leq n$).

Da G proximal ist, existieren $q_i \in P_G(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$).

Wir definieren für alle $1 \leq i \leq n$:

$G_i := \langle G \cup \{x_j : j \neq i\} \rangle$ und $f_i(x) := F_i(x + G)$ ($x \in E$).

Dann gilt: $f_i \in E'$, $\|f_i\| = 1$, $f_i = 0$ auf G_i und

$$f_i(x_i - q_i) = \|x_i - q_i\|.$$

Aus Theorem 1.1 in Singer 1 (S. 18) folgt damit: $q_i \in P_{G_i}(x_i)$.

Weiter gilt: $E = G \oplus \langle x_1 - q_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n - q_n \rangle$.

Sei nun $f_G^n: E \rightarrow G$ die Projektion von E auf G , welche auf $\langle x_1 - q_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n - q_n \rangle$ verschwindet.

Dann besitzt jedes $x \in E$ eine eindeutige Darstellung

$$x = f_G^n(x) + a_1(x_1 - q_1) + \dots + a_n(x_n - q_n) \quad (a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}).$$

Daraus folgt für $a_1, \dots, a_n \neq 0$:

$$\|x - f_G^n(x)\| = \|a_1(x_1 - q_1) + \dots + a_n(x_n - q_n)\|$$

$$\leq |a_1| \|x_1 - g_1\| + \dots + |a_n| \|x_n - g_n\|$$

$$\begin{aligned} &\leq |a_1| \|x_1 - g_1 + \frac{1}{a_1} f_G^n(x) + \frac{1}{a_1} a_2 (x_2 - g_2) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{a_1} a_n (x_n - g_n) - \frac{1}{a_1} g\| + \dots + |a_n| \|x_n - g_n + \\ &\quad + \frac{1}{a_n} f_G^n(x) + \frac{1}{a_n} a_1 (x_1 - g_1) + \dots + \frac{1}{a_n} a_{n-1} (x_{n-1} - g_{n-1}) \\ &\quad - \frac{1}{a_n} g\| \end{aligned}$$

$$\leq \|x - g\| + \dots + \|x - g\| = n \|x - g\| \quad (g \in G) \quad .$$

Daraus folgt: $f_G^n(x) \in P_G^n(x)$.

Falls $a_1, \dots, a_n = 0$ sind, gilt $x = f_G^n(x) \in G$,

woraus folgt $f_G^n(x) \in P_G^n(x) = \{ f_G^n(x) \}$.

Falls weder $a_1, \dots, a_n = 0$ noch $a_1, \dots, a_n = 0$ gilt,

verfährt man wie im Fall $a_1, \dots, a_n \neq 0$, wobei man

die $a_i = 0$ unbeachtet läßt. Auch hier erhält man $f_G^n(x) \in P_G^n(x)$.

Also ist $f_G^n(x) \in P_G^n(x)$ für alle $x \in E$ und damit $f_G^n: E \rightarrow G$

ein linearer Schnitt für $P_G^n: E \rightarrow 2^G$.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Satz 3 wurde in Singer [1] (Theorem 6.2, S. 142) für den

Fall $n=1$ mit elementaren Methoden bewiesen, die man bei

beliebigen $n \in \mathbb{N}$ nicht anwenden kann.

Der nächste Satz betrifft lineare Schnitte für die

λ -metrische Projektion auf endlich-dimensionale Teilvektorräume.

4. Satz:

Sei E ein normierter Raum und G ein Teilvektorraum von E mit $\dim G = n$.

Dann existiert ein linearer Schnitt $f_G^{n+1}: E \rightarrow G$

für $P_G^{n+1}: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Sei G ein Teilvektorraum von E mit $\dim G = n$.

Dann existiert nach Auerbachs Lemma für alle $1 \leq i \leq n$ ein $q_i \in G$ und ein $q'_i \in G'$ mit $\|q_i\| = 1$, $\|q'_i\| = 1$ und $q'_i(q_j) = \delta_{ij}$ ($1 \leq j \leq n$).

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert für alle $1 \leq i \leq n$ ein $x'_i \in E'$ mit $x'_i|_G = q'_i$ und $\|x'_i\| = 1$.

Wir definieren $f_G^{n+1}: E \rightarrow G$ durch $f_G^{n+1}(x) := x'_1(x)q_1 + \dots + x'_n(x)q_n$ ($x \in E$).

Offensichtlich ist $f_G^{n+1}: E \rightarrow G$ linear.

Weiter gilt: $f_G^{n+1}(q) = q$ ($q \in G$).

Dies folgt aus der Tatsache, daß $\{q_1, \dots, q_n\}$ eine Basis von G bilden und $q'_i(q_j) = \delta_{ij}$ gilt.

Außerdem gilt für alle $x \in E$

$$\begin{aligned} \|x - f_G^{n+1}(x)\| &\leq \|x - q - f_G^{n+1}(x - q)\| \leq \\ &\leq \|x - q\| + \|f_G^{n+1}(x - q)\| = \|x - q\| + \\ &+ \|x'_1(x - q)q_1 + \dots + x'_n(x - q)q_n\| \leq \\ &\leq \|x - q\| + n\|x - q\| = (n+1)\|x - q\| \quad (q \in G). \end{aligned}$$

Also ist $f_G^{n+1}: E \rightarrow G$ ein linearer Schnitt für $P_G^{n+1}: E \rightarrow 2^G$.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Als nächstes benötigen wir den Begriff des M -Ideals (siehe Alfsen, Effros [1]).

5. Definition:

Sei E ein Banachraum und G ein Teilvektorraum von E .

G heißt M -Ideal, falls eine Projektion $P: E' \rightarrow G^\perp$

auf $G^\perp$ existiert mit $\|x'\| = \|P(x')\| + \|x' - P(x')\|$ ($x' \in E'$).

Alfsen und Effros untersuchen in [1] M -Ideale und geben viele Beispiele an.

M -Ideale stehen mit linearen Schnitten für die metrische Projektion in folgendem Zusammenhang:

6. Satz:

Sei E ein Banachraum und G ein abgeschlossenes M -Ideal.
 Falls G reflexiv ist oder falls (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt, existiert ein linearer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$
 für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Für ein M -Ideal G in E existiert eine Projektion $P: E' \rightarrow G^\perp$
 von E' auf G mit $\|P\| = 1$.

Die Behauptung folgt nun sofort aus II, § 2, Korollar 5.

Damit ist Satz 6 bewiesen.

Eigenschaft (P'') wird in II, § 1, Definition 3 eingeführt.

Wir verweisen hier ausnahmsweise auf einen späteren
 Paragraphen.

Die beiden folgenden Sätze beruhen wesentlich auf Theorem 15
 und Theorem 18 in Dixmier [1] .

7. Satz:

Sei E ein Banachraum und $E^\perp := \{x''' \in E''': x'''(x) = 0 \ (x \in E)\}$.
 Dann existiert ein linearer Schnitt $f_{E^\perp}: E''' \rightarrow E^\perp$
 für $P_{E^\perp}: E''' \rightarrow 2^{E^\perp}$.

Beweis:

Nach Theorem 15 in Dixmier [1] gilt:

$$E''' = E' \oplus E^\perp \quad \text{und} \quad \|x'''\| \leq \|x' + y'''\| \quad (x' \in E', y''' \in E^\perp)$$

Sei $f_{E^\perp}: E''' \rightarrow E^\perp$ die Projektion auf $E^\perp$, welche
 auf E' verschwindet.

Dann hat jedes $x''' \in E'''$ genau eine Darstellung

$$x''' = x' + f_{E^\perp}(x''') \quad (x' \in E') \quad \text{und es gilt:}$$

$$\|x''' - f_{E^\perp}(x''')\| = \|x'\| \leq \|x' + f_{E^\perp}(x''')\| = \|x'''\| .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \|x''' - f_{E^\perp}(x''')\| &= \|x''' - y''' - f_{E^\perp}(x''' - y''')\| \\ &\leq \|x''' - y'''\| \quad (y''' \in E^\perp) . \end{aligned}$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

8. Satz:

Sei E ein nicht reflexiver Banachraum, welcher isomorph einem Dualraum ist.

Dann existiert ein abgeschlossener Teilvektorraum G von E'' ($G \neq \{0\}$, $G \neq E''$), so daß gilt:

Es existiert ein linearer Schnitt $f_G: E'' \rightarrow G$ für $P_G: E'' \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Sei E ein nicht reflexiver Banachraum, welcher isomorph einem Dualraum ist.

Dann existiert nach Theorem 18 in Dixmier [1] ein abgeschlossener Teilvektorraum G von E'' mit

$E'' = E \oplus G$ und es gilt: $\|x\| \leq \|x + g\|$ ($x \in E$, $g \in G$).

Da E als nicht reflexiv vorausgesetzt ist, gilt:

$G \neq \{0\}$ und $G \neq E''$.

Sei $f_G: E'' \rightarrow G$ die Projektion auf G , welche auf E verschwindet. Dann hat jedes $x'' \in E''$ eine eindeutige Darstellung $x'' = x + f_G(x'')$ ($x \in E$) und es gilt:

$$\|x'' - f_G(x'')\| = \|x\| \leq \|x + f_G(x'')\| = \|x''\|$$

Daraus folgt:

$$\|x'' - f_G(x'')\| = \|x'' - g - f_G(x'' - g)\| \leq \|x'' - g\| \quad (g \in G).$$

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Außerdem existiert für jedes abgeschlossene M -Ideal G eines Banachraumes E ein linearer Schnitt für $P_{G^\perp}: E' \rightarrow G^\perp$ (siehe Fakhoury [1]).

Kapitel II: Anwendungen von Schnitten für die metrische Projektion

§ 1. Stetige Schnitte für die metrische Projektion und normerhaltende Fortsetzungen kompakter Operatoren

Lindenstrauß behandelt in [1] (Kapitel VII) die folgende Frage: Gegeben sei ein kompakter Operator T von einem Banachraum G in einen G -Raum F (siehe Definition 1). Unter welchen Voraussetzungen ist es möglich, T normerhaltend zu einem kompakten Operator $\tilde{T}$ von einem Banachraum E ($E \supseteq G$) in F fortzusetzen?

Lindenstrauß zeigt, daß dieses Problem unter bestimmten Voraussetzungen dual ist zur Existenz eines stetigen Schnittes für $P_{G^\perp}: E' \rightarrow 2^{G^\perp}$.

Wir untersuchen im folgenden die Bedeutung der Existenz stetiger Schnitte für $P_G: E \rightarrow 2^G$ für die normerhaltende Fortsetzung vom kompakten Operatoren.

Um dieses Problem zu lösen, muß zunächst geklärt werden, welcher Zusammenhang zwischen der Existenz stetiger Schnitte für $P_G: E \rightarrow 2^G$ und der Existenz stetiger Schnitte für die Hahn-Banach-Abbildung $H: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$ (siehe Definition 1) besteht.

Der Begriff der Hahn-Banach-Abbildung ist schon in I. § 3 aufgetreten. Der Vollständigkeit halber geben wir hier nun folgende Definition:

1. Definition:

Sei E ein normierter Raum und G ein Teilvektorraum von E .

Dann heißt die Abbildung $H: G' \rightarrow 2^{E'}$, definiert durch

$$H(g') := \{x' \in E' : x'|_G = g' \text{ und } \|x'\| = \|g'\|\} \quad (g' \in G')$$

Hahn-Banach-Abbildung .

Wir benötigen außerdem die folgende Definition:

2. Definition:

Sei E ein Vektorraum über K und G ein Teilvektorraum von E . Eine Abbildung $P: E \rightarrow G$ heißt Projektion von E in G , falls P linear und idempotent ($P^2 = P$) ist.

Der nun folgende Satz zeigt, daß die Existenz stetiger Schnitte für $P_G: E \rightarrow 2^G$ unter bestimmten Voraussetzungen dual ist zur Existenz stetiger Schnitte für $H: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$. Der kürzeren Formulierung wegen, geben wir die folgende Definition:

3. Definition:

Sei E ein normierter Raum und G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E . Das Paar (E, G) besitze die Eigenschaft (P'') , genau dann, wenn eine Projektion $P: E'' \rightarrow E$ auf E existiert mit $\|P\| = 1$ und $P(G^{\perp\perp}) = G$.

4. Satz:

Sei E ein normierter Raum und G ein proximaler Teilvektorraum von E .

Wir betrachten die beiden folgenden Aussagen:

- (1) Es existiert ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.
- (2) Es existiert ein stetiger Schnitt $h: (G^\perp)' \rightarrow E''$ für $H: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$.

Dann gilt:

Aus (1) folgt (2), falls E/G reflexiv ist.

Aus (2) folgt (1), falls G reflexiv ist oder (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt.

Beweis:

Wir zeigen, daß (2) aus (1) folgt, falls E/G reflexiv ist:
 Nach Theorem 5.4.5 (Brown, Page [1]) ist $(G^\perp)'$ isometrisch isomorph $(E/G)''$ und $(E/G)''$ isometrisch isomorph E/G nach Voraussetzung. Im folgenden identifizieren wir deshalb $(G^\perp)'$ und E/G . Die Quotientenabbildung $\omega: E \rightarrow E/G$, definiert durch $\omega(x) := x + G$ ($x \in E$), ist offen und surjektiv. Somit ist jeder beliebige Schnitt $f: E/G \rightarrow E$ für $\omega^{-1}: E/G \rightarrow 2^E$ stetig, da für alle Teilmengen $\tilde{E}$ von E gilt: $f^{-1}(\tilde{E}) = \omega(\tilde{E})$. Sei f solch ein beliebiger Schnitt.

Wir definieren für alle $x+G \in E/G = (G^\perp)'$

$$h(x+G) := f(x+G) - f_G(f(x+G)).$$

Offensichtlich ist $h: (G^\perp)' \rightarrow E''$ stetig.

Wir zeigen: $h: (G^\perp)' \rightarrow E''$ ist ein Schnitt für $H: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$.

Nach Korollar 1.2 (Singer [1], S. 21) gilt:

$$\|x+g\|_{G^\perp} = d(x, G) \quad (x \in E \setminus G, g \in G), \text{ woraus folgt:}$$

$$\|f(x+G)\|_{G^\perp} = \|x\|_{G^\perp} = d(x, G) \quad (x \in E \setminus G).$$

Damit erhalten wir nun für alle $x+G \in E/G = (G^\perp)'$:

$$(a) \quad \|h(x+G)\| = \|f(x+G) - f_G(f(x+G))\| = d(f(x+G), G) =$$

$$\|f(x+G)\|_{G^\perp} = \|x\|_{G^\perp} = \|x+G\|$$

$$(b) \quad h(x+G)|_{G^\perp} = (f(x+G) - f_G(f(x+G)))|_{G^\perp} =$$

$$f(x+G)|_{G^\perp} = x|_{G^\perp} = x+G.$$

Für $x \in G$ ist $h(x) = 0 \in H(x+G) = \{0\}$.

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wir zeigen, daß (1) aus (2) folgt, falls G reflexiv ist.

Sei $K: E \rightarrow E''$ die kanonische Einbettung von E in E'' .

K ist linear und es gilt nach Korollar 5.3.7 (Brown, Page [1])

$$\|K(x)\| = \|x\|.$$

Existiere nun wie in der Voraussetzung ein stetiger Schnitt für $H: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$. Dann existiert nach Bemerkung 2 zu

Theorem 5 (Deutsch, Pollul, Singer[1]) ein stetiger Schnitt für $P_{G^{\perp\perp}}: E'' \rightarrow 2^{G^{\perp\perp}}$. Diesen Schnitt bezeichne man mit $f_{G^{\perp\perp}}$.

Wir definieren für alle $x \in E$: $f_G(x) := f_{G^{\perp\perp}}(K(x)) \in G^{\perp\perp}$.

Nach Theorem 5.4.4 (Brown, Page [1]) ist $G^{\perp\perp}$ isometrisch isomorph zu G' und damit nach Voraussetzung zu G .

Im folgenden identifizieren wir G und $G^{\perp\perp}$.

Also ist $f_G(x)$ aus G für alle x aus E und es gilt:

$$\begin{aligned} \|x - f_G(x)\| &= \|K(x) - f_{G^{\perp\perp}}(K(x))\| = d(K(x), G^{\perp\perp}) = \\ &= \inf \{ \|K(x) - y'\| : y' \in G^{\perp\perp} \} = \inf \{ \|K(x) - K(q)\| : q \in G \} = \\ &= \inf \{ \|K(x-q)\| : q \in G \} = \inf \{ \|x-q\| : q \in G \} = d(x, G). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $f_G: E \rightarrow G$ stetig.

Damit ist der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Wir zeigen, daß (1) aus (2) folgt, falls (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt:

Gilt (2) und existiert eine Projektion $P: E'' \rightarrow E$ auf E mit $\|P\| = 1$ und $P(G^{\perp\perp}) = G$, so definieren wir für alle $x \in E$ $f_G(x) := P(x - h(x|_{G^{\perp}}))$.

Wir zeigen, daß $f_G(x)$ aus G ist für alle x aus E :

Für $x \in E$ gilt $h(x|_{G^{\perp}})|_{G^{\perp}} = x|_{G^{\perp}}$, woraus folgt, daß $x - h(x|_{G^{\perp}})$ aus $G^{\perp\perp}$ und damit $f_G(x) = P(x - h(x|_{G^{\perp}}))$ aus G ist nach Voraussetzung.

Wir zeigen, daß $\|x - f_G(x)\| = d(x, G)$ ist für alle $x \in E \setminus G$:

$$\begin{aligned} \text{Für } x \in E \setminus G \text{ gilt: } \|x - f_G(x)\| &= \|x - P(x - h(x|_{G^{\perp}}))\| = \\ &= \|x - P(x) - P(h(x|_{G^{\perp}}))\| = \|P(h(x|_{G^{\perp}}))\| \leq \|h(x|_{G^{\perp}})\| = \\ &= \|x|_{G^{\perp}}\| = d(x, G). \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt nach Korollar 1.2

(Singer [1], S. 21).

Für $x \in G$ ist $f_G(x) = P(x - h(x|_{G^{\perp}})) = P(x) = x \in P_G(x) = \{x\}$.

Also ist $f_G: E \rightarrow G$ ein Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$, der offensichtlich stetig ist. Damit ist der letzte Teil des Satzes bewiesen.

Lindenstrauß bewies in [1] eine zu Satz 4 duale Aussage ohne jegliche Reflexivitätsforderungen. Dazu bemerken wir:

5. Bemerkung:

Wir betrachten die beiden folgenden Diagramme:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\eta} & E'/G^\perp \\ H \downarrow & \swarrow \text{Id}-P_{G^\perp} & \\ {}_2E' & & \end{array}$$

Dabei ist $\eta: G' \rightarrow E'/G^\perp$ eine Isometrie, welche nach Brown, Page [1] (Theorem 5.4.4) existiert.

Die Abbildung $\text{Id}-P_{G^\perp}: E'/G^\perp \rightarrow {}_2E'$ ist definiert durch $(\text{Id}-P_{G^\perp})(x'+G^\perp) := x'-P_{G^\perp}(x') \quad (x' \in E')$.

$\text{Id}-P_{G^\perp}$ ist wohldefiniert.

Das Diagramm kommutiert nach Deutsch, Pollul, Singer [1].

(2) Sei G proximal.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi} (G') & \xrightarrow{H} {}_2E'' \\ \text{Id}-P_G \searrow & & \swarrow \delta \\ & {}_2E & \end{array}$$

Mit $K: E \rightarrow E''$ bezeichnen wir die kanonische Einbettung von E in E'' . Die Abbildung $\psi: E \rightarrow (G^\perp)'$ ist definiert durch $\psi(x) := K(x) \Big|_{G^\perp} \quad (x \in E)$. Die Abbildung $\delta: {}_2E'' \rightarrow {}_2E$ ist definiert durch $\delta(A) := K^{-1}(K(E) \cap A) \quad (A \in {}_2E'')$.

Das Diagramm kommutiert nach Blatter [3].

Aus dem Vergleich dieser beiden Diagramme ersieht man, daß sich die von Lindenstrauß untersuchte Dualität fast kanonisch ergibt, während unsere Problemstellung in Satz 4 gewisse Zusatzforderungen verlangt. Das ist der entscheidende Unterschied zwischen Lindenstrauß Ergebnissen und unseren Resultaten in diesem Paragraphen. Sinngemäß gilt das auch für die Aussagen im nächsten Paragraphen.

Wir stellen nun die Frage, wann ein Paar (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt.

Das folgende Beispiel ist unmittelbar einzusehen:

6. Beispiel:

Sei E ein reflexiver Banachraum und G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E . Dann besitzt das Paar (E, G) Eigenschaft (P'') .

Für einen Dualraum gilt hinsichtlich der Eigenschaft (P'') der folgende Satz, welcher wesentlich auf Theorem 15 (Dixmier [1]) beruht.

7. Satz:

Sei E ein Banachraum und G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E .

Dann besitzt $(E', G^\perp)$ Eigenschaft (P'') .

Beweis:

Nach Theorem 15 in Dixmier [1] gilt:

$E''' = E' \oplus E^\perp$, wobei $E^\perp := \{x''' \in E''': x'''(x) = 0 \ (x \in E)\}$ und $\|x'\| \leq \|x' + y'''\| \ (x' \in E', y''' \in E^\perp)$.

Sei $P: E''' \rightarrow E'$ die Projektion auf E' , welche auf $E^\perp$ verschwindet. Dann besitzt jedes $x''' \in E'''$ eine eindeutige Darstellung $x''' = P(x''') + y''' \ (y''' \in E^\perp)$ und es gilt:

$$\|P(x''')\| \leq \|P(x''') + y'''\| = \|x'''\|.$$

Daraus folgt: $\|P\| = 1$.

Sei G nun ein abgeschlossener Teilvektorraum von E .

Wir zeigen: $P(G^{\perp\perp}) = G^\perp$.

Für $z''' \in G^{\perp\perp}$ und $q \in G \subseteq G^{\perp\perp}$ gilt:

$$z'''(q) = P(z''')(q) + y'''(q) \ (y''' \in E^\perp).$$

Weiter gilt: $z'''(q) = 0$ und $y'''(q) = 0$.

Daraus folgt: $P(z''')(q) = 0 \ (q \in G)$, d.h. $P(z''') \in G^\perp$.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

8. Beispiel:

Falls E ein Banachraum ist, welcher isomorph einem Dualraum ist, so folgt aus Theorem 18 (Dixmier [1]), daß eine Projektion $P: E'' \rightarrow E$ von E'' auf E existiert mit $\|P\| = 1$.

Damit existieren abgeschlossene Teilvektorräume G von E , etwa die reflexiven, so daß (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt.

Ein typisches Beispiel dafür, daß keine Projektion

$P: E'' \rightarrow E$ von E'' auf E existiert mit $\|P\| = 1$

ist $E = c_0$ (siehe Lindenstraß [2]).

Als Korollar zu Satz 4 erhalten wir die angekündigte Aussage über den Zusammenhang von stetigen Schnitten für $P_G: E \rightarrow 2^G$ und der normerhaltenden Fortsetzung von kompakten Operatoren $T: G^\perp \rightarrow F$ zu $\tilde{T}: E' \rightarrow F$, wobei F ein G -Raum ist.

Zunächst benötigen wir die folgende

9. Definition:

Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Ein abgeschlossener Teilvektorraum F von $C(X)$ heißt G -Raum, falls alle f aus F eine Menge Ω von Bedingungen der folgenden Form erfüllen:

$$f(x_\alpha^1) = \lambda_\alpha f(x_\alpha^2) \quad (\alpha \in \Omega, x_\alpha^1, x_\alpha^2 \in X, \lambda_\alpha \in \mathbb{R}).$$

Jeder M -Raum im Sinn von Kakutani [1] und jeder $c_0(K)$ -Raum (siehe Day [1], S. 89) ist ein G -Raum.

10. Korollar:

Sei E ein Banachraum, G ein proximaler Teilvektorraum von E und E/G reflexiv.

Es existiere ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Dann besitzt jeder kompakte Operator $T: G^\perp \rightarrow F$, wobei F ein G -Raum sei, eine kompakte normerhaltende Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow F$.

Beweis:

Es existiere ein stetiger Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Aus Satz 4 folgt unter der Voraussetzung der Reflexivität von E/G die Existenz eines stetigen Schnittes für $H: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E'}$. E' ist ein Banachraum und $G^\perp$ ein abgeschlossener Teilvektorraum von E' .

Sei nun $T: G^\perp \rightarrow F$ ein kompakter Operator, wobei F ein G -Raum sei. Dann folgt aus Lemma 7.2 (Lindenstrauss [1]), daß ein kompakter normerhaltender Operator $\tilde{T}: E' \rightarrow F$ existiert, der $T: G^\perp \rightarrow F$ fortsetzt.

Damit ist Korollar 9 bewiesen.

Lindenstrauss bewies in [1] eine duale Aussage zu Korollar 9 ohne die in diesem Korollar angegebene Reflexivitätsbedingung.

Die Bemerkung zu Satz 4 über diese Reflexivitätsforderung gilt hier sinngemäß ebenfalls.

Unter der Voraussetzung eines tschebyscheffschen Teilvektorraumes erhalten wir in Satz 12 eine Umkehrung zu Korollar 10. Zunächst benötigen wir aber die folgende

11. Definition:

Der Raum aller konvergenten Folgen (z_n) in $\mathbb{K}$, versehen mit der Norm $\|(z_n)\| := \sup \{|z_n| : n \in \mathbb{N}\}$, werde mit c bezeichnet.

12. Satz:

Sei E ein Banachraum und G ein tschebyscheffscher, reflexiver Teilvektorraum von E .

Jeder kompakte Operator $T: G^\perp \rightarrow c$ besitze eine kompakte normerhaltende Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow c$.

Dann existiert ein stetiger Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Sei G ein tschebyscheffscher Teilvektorraum von E .

Mit $f_G: E \rightarrow G$ bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Sei weiter (x_n) eine Folge in $E \setminus G$, welche gegen ein x aus E konvergiert.

Wir zeigen: $f_G(x_n) \rightarrow f_G(x)$.

Also können wir, da f_G homogen ist nach I § 1, Satz 3, annehmen, daß $\|x_n\|_{G^\perp} = 1$ sei.

Wir definieren $T: G \rightarrow c$ durch $T(y') := (y'(x_1), y'(x_2), \dots)$ ($y' \in G^\perp$). Offensichtlich ist T ein kompakter Operator mit $\|T\| = 1$.

Nach Voraussetzung existiert eine kompakte Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow c$ für $T: G \rightarrow c$ mit $\|\tilde{T}\| = 1$.

Es gilt: $T(x') = (x'_1(x'), x'_2(x'), \dots)$, wobei $x'_n \in E'$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da $\tilde{T}$ eine Fortsetzung von T ist, gilt weiter:

$$x_n''|_{G^\perp} = x_n|_{G^\perp}, \text{ d.h. } x_n - x_n'' \in G^\perp = G \subseteq E \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt nach Theorem 5.4.4

und Theorem 5.4.5 in Brown, Page [1].

Daraus folgt also: $x_n'' \in E$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir schreiben nun y_n anstelle von x_n'' ($n \in \mathbb{N}$).

Da $\|\tilde{T}\| = 1$ ist, gilt $\|y_n\| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Wir zeigen: $x_n - y_n = f_G(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$\text{Es gilt: } \|x_n - (x_n - y_n)\| = \|y_n\| \leq 1 = \|x_n|_{G^\perp}\| = \|(x_n - (x_n - y_n))\|$$

Aus Korollar 1.2 (Singer [1], S. 21) folgt:

$$x_n - y_n \in P_G(x_n) = \{f_G(x_n)\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da $\tilde{T}$ ein kompakter Operator ist, existiert ein $y \in E$

mit $y_n \rightarrow y$.

$$\text{Damit gilt: } f_G(x_n) = x_n - y_n \rightarrow x - y$$

Da $P_G: E \rightarrow 2^G$ (K)-oberhalb-stetig ist (siehe Singer [1], S. 3

gilt: $x - y \in P_G(x) = \{f_G(x)\}$, d.h. $f_G(x_n) \rightarrow f_G(x)$.

Also ist $f_G: E \rightarrow G$ ein stetiger Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Damit ist Satz 11 bewiesen.

Lindenstrauss bewies in [1] ein zu Satz 11 duales Resultat.

Aus Korollar 10 folgt insbesondere folgende Aussage:

13. Korollar:

Sei E ein strikt konvexer, reflexiver Banachraum und G

ein approximativ-kompakter Teilvektorraum von E . Dann

besitzt jeder kompakte Operator $T: G^\perp \rightarrow F$, wobei F ein

G -Raum sei, eine kompakte normerhaltende Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow F$.

Beweis:

Aus der Reflexivität von E folgt die Reflexivität von E/G .

Da G approximativ-kompakt ist, ist G proximal. Da E strikt

konvex ist, ist G tschebyscheff und damit existiert genau

ein Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$. Aus der Approximativ-

Kompaktheit von G folgt außerdem die Stetigkeit von f_G (siehe Singer [1]). Schließlich folgt aus Korollar 10 die Behauptung.

Damit ist Korollar 13 bewiesen.

Insbesondere ist jeder gleichmäßig konvexe Raum, und damit jeder L^p -Raum ($1 < p < \infty$), strikt konvex und reflexiv und jeder endlich-dimensionale Teilvektorraum eines normierten Raumes approximativ-kompakt.

Unter Verwendung von Satz 12 erhalten wir außerdem:

14. Beispiel:

Ist E ein strikt konvexer, reflexiver Banachraum und G ein proximaler Teilvektorraum von E , so folgt i.a. nicht, daß jeder kompakte Operator $T: G^\perp \rightarrow c$ eine kompakte normerhaltende Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow c$ besitzt.

Begründung:

Da E strikt konvex und reflexiv ist, ist G tschebyscheff und reflexiv, d.h. es existiert genau ein Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Kripke gab nun in [1] einen strikt konvexen, reflexiven Banachraum und einen tschebyscheffschen Teilvektorraum G von E , so daß f_G nicht stetig ist. Aus Satz 12 folgt damit die Behauptung.

§ 2. Lineare Schnitte für die λ -metrische Projektion und Fortsetzungen kompakter Operatoren

Fakhoury beweist in [1] folgende Dualitätsaussage:
Gegeben sei ein Banachraum E und ein abgeschlossener Teilvektorraum G von E . Dann ist die Existenz eines linearen Schnittes für $P_G^\lambda: E' \rightarrow 2^{G^\perp}$ äquivalent dazu, daß jeder kompakte Operator $T: G \rightarrow X'$ (X Banachraum) eine kompakte Fortsetzung $\tilde{T}: E \rightarrow X'$ besitzt mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

Wir untersuchen im folgenden die Bedeutung der Existenz linearer Schnitte für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$ für die Fortsetzung von kompakten Operatoren.

Um dieses Problem zu lösen, muß zunächst geklärt werden, welcher Zusammenhang zwischen der Existenz linearer Schnitte für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$ und der Existenz linearer Schnitte für die λ -Hahn-Banach-Abbildung $H^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$ (siehe Definition 3) besteht. Dazu benötigen wir die folgende Definition:

1. Definition:

Sei E ein normierter Raum, G ein Teilvektorraum von E und $\lambda \geq 1$. Dann heißt die Abbildung $H^\lambda: G' \rightarrow 2^{E'}$, definiert durch $H^\lambda(q') := \{x' \in E': x'|_G = q', \|x'\| \leq \lambda \|q'\|\}$ ($q' \in G'$) λ -Hahn-Banach-Abbildung.

Der nun folgende Satz zeigt, daß die Existenz linearer Schnitte für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$ unter bestimmten Voraussetzungen dual ist zur Existenz linearer Schnitte für $H^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$.

2. Satz:

Sei E ein normierter Raum, G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E und $\lambda \geq 1$. Im Fall $\lambda = 1$ sei G proximal.

Wir betrachten die beiden folgenden Aussagen:

- (1) Es existiert ein linearer Schnitt $f_G^\lambda: E \rightarrow G$ für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

(2) Es existiert ein linearer Schnitt $h^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow E''$
für $H^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$.

Dann gilt:

Aus (1) folgt (2), falls E/G reflexiv ist.

Aus (2) folgt (1), falls G reflexiv ist oder (E, G)

Eigenschaft (P'') besitzt.

Beweis:

Wir zeigen, daß (2) aus (1) folgt, falls E/G reflexiv ist:

Wie im Beweis zu Satz 4 in § 1 folgt aus der Reflexivität von E/G , daß $(G^\perp)'$ isometrisch isomorph zu E/G ist.

Im folgenden identifizieren wir deshalb $(G^\perp)'$ und E/G .

Nach Exercise 5.3.10 in Brown, Page [1] folgt, daß G im linearen Sinn komplementiert ist in E . Also existiert eine Projektion $P: E \rightarrow G$ auf G .

Wir definieren eine Abbildung $f: E/G \rightarrow E$ durch $f(x+G) := x - P(x)$ ($x+G \in E/G$). f ist wohldefiniert, da für $x-y \in G$ ($x, y \in E$) gilt: $x - P(x) = y - P(y)$.

Außerdem gilt $\omega \circ f = \text{Id}$, wobei $\omega: E \rightarrow E/G$ die Quotientenabbildung bezeichne. Also ist $f: E/G \rightarrow E$ ein linearer Schnitt für $\omega^{-1}: E/G \rightarrow 2^E$.

Wir definieren für alle $x+G \in E/G = (G^\perp)'$:

$$h^\lambda(x+G) := f(x+G) - f_G^\lambda(f(x+G)).$$

Offensichtlich ist $h^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow E''$ linear.

Wie im Beweis zu Satz 4 in §1 ergibt sich für alle $x+G \in E/G = (G^\perp)'$: $\|h^\lambda(x+G)\| \leq \lambda \|x+G\|$ und $h^\lambda(x+G)|_{G^\perp} = x+G$.

Also ist $h^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow E''$ ein linearer Schnitt für

$$H^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wir zeigen, daß (1) aus (2) folgt, falls G reflexiv ist.

Sei $K: E \rightarrow E''$ die kanonische Einbettung von E in E'' .

Es existiere ein linearer Schnitt $h^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow E''$ für $h^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$.

Dann existiert nach Theorem 2.4 in Fakhoury [1] ein linearer Schnitt $f_{G^\perp}^\lambda: E'' \rightarrow G^{\perp\perp}$ für $P_{G^\perp}^\lambda: E'' \rightarrow 2^{G^{\perp\perp}}$.

Wir definieren für alle x aus E : $f_G^\lambda(x) := f_{G^\perp}^\lambda(K(x)) \in G^{\perp\perp} = G$.

Man beachte, daß G reflexiv ist.

Wie im Beweis zu Satz 4 in § 1 zeigen wir, daß $f_G^\lambda(x) \in P_G^\lambda(x)$ ist für alle $x \in E$. Also ist $f_G^\lambda: E \rightarrow G$ ein linearer Schnitt für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

Damit ist der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Der dritte Teil des Satzes folgt analog wie im Beweis zu Satz 4 in § 1.

Als Korollar zu Satz 2 erhält man nun die folgende Aussage, welche später verwendet wird, um den Zusammenhang zwischen der Existenz linearer Schnitte für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$ und der Fortsetzung von kompakten Operatoren aufzuzeigen.

3. Korollar:

Sei E ein normierter Raum, G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E und $\lambda \geq 1$. Im Fall $\lambda = 1$ sei G proximal.

Wir betrachten die folgenden beiden Aussagen:

- (1) Es existiert ein linearer Schnitt $f_G^\lambda: E \rightarrow G$ für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.
- (2) Es existiert eine Projektion $P: E' \rightarrow G^\perp$ von E' auf $G^\perp$ mit $\|P\| \leq \lambda$.

Dann gilt:

Aus (1) folgt (2).

Aus (2) folgt (1), falls G reflexiv ist oder (E, G)

Eigenschaft (P'') besitzt.

Beweis:

Wir zeigen, daß (2) aus (1) folgt:

Sei $f_G^\lambda: E \rightarrow G$ ein linearer Schnitt für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

Für alle $x \in E$ gilt: $\|x - f_G^\lambda(x)\| \leq \lambda \, d(x, G) \leq \lambda \|x\|$.

Damit ist $\text{Id} - f_G^\lambda: E \rightarrow E$ eine lineare Abbildung mit

$$\|\text{Id} - f_G^\lambda\| \leq \lambda.$$

Wir definieren: $P := (\text{Id} - (f_G^\lambda)')'$, wobei $(f_G^\lambda)'$ die transponierte Abbildung zu f_G^λ bezeichne.

Wir zeigen: $P(E') = G^\perp$.

Für $x' \in E'$ und $g \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} P(x')(g) &= (\text{Id} - (f_G^\lambda)')(x')(g) = x'(g) - x'(f_G^\lambda(g)) = \\ &= x'(g) - x'(g) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $P(E') \subseteq G^\perp$.

Sei nun $y' \in G^\perp$ und $x \in E$, so gilt:

$$P(y')(x) = (\text{Id} - (f_G^\lambda)')(y')(x) = y'(x) - y'(f_G^\lambda(x)) = y'(x).$$

Daraus folgt: $P(y') = y'$.

Damit ergibt sich nun: $P(E') = G^\perp$.

Da die Norm einer beschränkten, linearen Abbildung gleich der Norm ihrer transponierten Abbildung ist, gilt: $\|P\| \leq \lambda$.

Also ist $P: E' \rightarrow G^\perp$ eine Projektion von E' auf $G^\perp$ mit $\|P\| \leq \lambda$.

Wir zeigen nun, daß unter den zusätzlichen Voraussetzungen im Satz (1) aus (2) folgt:

Sei $P: E' \rightarrow G^\perp$ eine Projektion von E' auf $G^\perp$ mit $\|P\| \leq \lambda$.

Für die transponierte Abbildung $P': (G^\perp)' \rightarrow E''$ gilt:

$$\|P'(y'')\| \leq \lambda \|y''\| \quad (y'' \in (G^\perp)')$$

$$\text{Weiter gilt: } P'(y'')|_{G^\perp} = y'' \quad (y'' \in (G^\perp)').$$

Sei nämlich $y'' \in (G^\perp)'$ und $v' \in G^\perp$, dann gilt:

$$P'(y'')(y') = y''(P(y')) = y''(y').$$

Also ist $P': (G^\perp)' \rightarrow E''$ ein linearer Schnitt für
 $H^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E''}$ und damit existiert unter den zusätzlichen
 Voraussetzungen nach Satz 3 ein linearer Schnitt für
 $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Damit ist Korollar 3 bewiesen.

Fakhoury bewies in [1] (Theorem 2.4 und Korollar 2.6) ähnliche
 duale Resultate zu Satz 4 und Korollar 5, ohne die
 in unseren Ergebnissen geforderten Reflexivitätsbedingungen.
 Dazu bemerken wir:

4. Bemerkung:

Die Reflexivitätsbedingungen in Satz 4 und Korollar 5
 können nicht weggelassen werden. Sonst würde aus Korollar 5
 folgen, daß jedes M -Ideal G eines Banachraumes E einen
 linearen Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$ zuläßt und damit wäre
 jedes M -Ideal G komplementiert in E . Dies gilt aber im
 allgemeinen nicht. $E: l_\infty$ und $G: c_0$ ist ein Gegenbeispiel
 (siehe Fakhoury [2]).

Wir beweisen nun, daß für einen Banachraum E und einen abge-
 schlossenen Teilvektorraum G die Existenz eines linearen
 Schnittes für $P_G^\lambda: E \rightarrow G$ unter gewissen Voraussetzungen dual
 ist dazu, daß jeder kompakte Operator $T: G^\perp \rightarrow X$
 (X Banachraum) eine kompakte Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow X$ besitzt
 mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$. Der Satz wird unter Verwendung von Korollar 3
 bewiesen.

5. Satz:

Sei E ein Banachraum, G ein abgeschlossener Teilvektorraum
 von E und $\lambda \geq 1$. Im Fall $\lambda = 1$ sei G proximal.

Wir betrachten die folgenden Aussagen:

- (1) Es existiert ein linearer Schnitt $f_G^\lambda: E \rightarrow G$
für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.
- (2) Für jeden Banachraum X besitzt jeder beschränkte
lineare Operator $T: G^\perp \rightarrow X$ eine beschränkte lineare
Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.
- (3) Für jeden Banachraum X besitzt jeder kompakte
(bzw. schwach kompakte) Operator $T: G^\perp \rightarrow X$ eine
kompakte (bzw. schwach kompakte) Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow X$
mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.
- (4) Für jeden endlich-dimensionalen Raum X
besitzt jeder beschränkte lineare Operator $T: G^\perp \rightarrow X$
eine beschränkte lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow X$ mit
 $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

Dann gilt:

$$(1) \Rightarrow (2) \quad \text{und} \quad (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4).$$

Die vier Aussagen sind äquivalent, falls G reflexiv ist
oder falls (E, G) Eigenschaft (P'') besitzt.

Beweis:

Wir zeigen, daß (2) aus (1) folgt:

Sei $T: G^\perp \rightarrow X$ ein beschränkter, linearer Operator und
es existiere ein linearer Schnitt für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

Nach Korollar 3 existiert eine Projektion $P: E' \rightarrow G^\perp$
von E' auf $G^\perp$ mit $\|P\| \leq \lambda$.

Wir definieren $\tilde{T} := T \circ P: E' \rightarrow X$.

Dann gilt für $y' \in G^\perp$: $\tilde{T}(y') = T \circ P(y') = T(y')$ und

$$\|\tilde{T}\| = \|T \circ P\| \leq \|T\| \cdot \|P\| \leq \lambda \|T\|.$$

$\tilde{T}: E' \rightarrow G$ ist also die gesuchte Fortsetzung.

Wir zeigen, daß (3) aus (1) folgt:

Sei $T: G^\perp \rightarrow X$ ein kompakter Operator und es gelte (1).

Dann existiert nach Korollar 3 eine Projektion $P: E' \rightarrow G^\perp$

von E' auf G mit $\|P\| \leq \lambda$.

Wir definieren wieder: $\tilde{T} := T_0 P$.

Nach Theorem 4 in Dunford-Schwartz [1] (S. 486) ist das Produkt eines kompakten Operators und eines beschränkten linearen Operators ein kompakter Operator, also ist $\tilde{T}$ kompakt. Die geforderten Eigenschaften von T folgert man wie unter (1) $\Rightarrow$ (2).

Die Aussage über schwach kompakte Operatoren ergibt sich völlig analog durch Anwendung von Theorem 5 in Dunford-Schwartz [1] (S. 484), welches besagt, daß das Produkt eines schwach kompakten Operators und eines beschränkten linearen Operators ein schwach kompakter Operator ist.

Wir zeigen, daß (4) aus (3) folgt:

Dies gilt aufgrund der Tatsache, daß jeder beschränkte lineare Operator T ($\|T\| \leq \lambda$) mit einem endlich-dimensionalen Teilvektorraum X als Wertebereich kompakt ist. Es gilt nämlich: $T(S(0,1)) \subseteq K'(0,\lambda)$ und $K'(0,\lambda)$ ist kompakt, da X endlich-dimensional ist.

Wir zeigen, daß unter den zusätzlichen Voraussetzungen im Satz (1) aus (2) folgt:

Unter der Voraussetzung (2) besitzt die Identität $\text{Id}: G^\perp \rightarrow G^\perp$ eine beschränkte lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E' \rightarrow G^\perp$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda$.

Für $\tilde{T}: E' \rightarrow G^\perp$ gilt: $\tilde{T}(y') = y' \quad (y' \in G^\perp)$.

Damit ist $\tilde{T}$ eine Projektion von E' auf $G^\perp$ mit der Norm kleiner oder gleich λ . Nach Korollar 3 folgt unter den zusätzlichen Voraussetzungen die Aussage (1).

Wir zeigen, daß unter den zusätzlichen Voraussetzungen im Satz (1) aus (4) folgt:

Gilt (4), so folgt aus Theorem 3.1 in Fakhoury [1] mit $V := E'$ und $M := G^\perp$ die Existenz eines linearen Schnittes

für $H^\lambda: (G^\perp)' \rightarrow 2^{E'}$. Nach Satz 2 folgt unter den zusätzlichen Voraussetzungen im Satz die Aussage (1).

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Fakhoury bewies in [1] ein ähnliches duales Resultat zu Satz 7 ohne die in Satz 7 geforderten Reflexivitätsbedingungen. Wie wir bereits gezeigt haben, können wir diese Bedingungen nicht weglassen (siehe Bemerkung 6).

Über den Zusammenhang zu Fakhourys Ergebnissen bemerken wir:

6. Bemerkung:

Wie sofort zu ersehen ist, sind alle vier Aussagen in Satz 5 äquivalent, falls E reflexiv ist. Setzt man in Satz 5 in diesem Fall E' für E und $G^\perp$ für G , so erhält man eine stärkere Aussage als in Theorem 3.1 (Fakhoury [1]). Dieses Theorem enthält nämlich die Äquivalenz der Aussagen (1) bis (4) in Satz 5, wobei E' anstelle von E und $G^\perp$ anstelle von G steht, allerdings mit der Bedingung (2') Für jeden Dualraum X' besitzt jeder beschränkte

lineare Operator $T: G \rightarrow X'$ eine beschränkte lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E \rightarrow X'$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

anstelle unserer Aussage im Fall der Reflexivität von E

(2) Für jeden Banachraum X besitzt jeder beschränkte lineare Operator $T: G \rightarrow X$ eine beschränkte lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

Vergleicht man weiterhin unsere Ergebnisse (Satz 2 und Satz 5) in dem Spezialfall, daß E' für E und $G^\perp$ für G stehe, mit den Resultaten von Fakhoury [1] (Theorem 2.4 und Theorem 3.1), so erhält man folgende Aussagen:

7. Korollar:

Für einen Banachraum E und einen abgeschlossenen Teilvektorraum G von E sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Es existiert ein linearer Schnitt für $P_{G^\perp}^\lambda: E' \rightarrow 2^{G^\perp}$.
- (2) Es existiert ein linearer Schnitt für $P_{G^{\perp\perp}}^\lambda: E''' \rightarrow 2^{G^{\perp\perp}}$.
- (3) Es existiert ein linearer Schnitt für $H^\lambda: G' \rightarrow 2^{E'}$.
- (4) Es existiert ein linearer Schnitt $H^\lambda: (G^{\perp\perp})' \rightarrow 2^{E''}$.

8. Korollar:

Für einen Banachraum E und einen abgeschlossenen Teilvektorraum G von E sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Es existiert ein linearer Schnitt für $P_{G^\perp}^\lambda: E' \rightarrow 2^{G^\perp}$.
- (2) Für jeden Dualraum X' besitzt jeder beschränkte, lineare Operator $T: G \rightarrow X'$ eine beschränkte, lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E \rightarrow X'$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.
- (3) Für jeden Banachraum X besitzt jeder beschränkte, lineare Operator $T: G^{\perp\perp} \rightarrow X$ eine beschränkte, lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E'' \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.
- (4) Für jeden Banachraum X besitzt jeder kompakte (bzw. schwach-kompakte) Operator $T: G \rightarrow X$ eine kompakte (bzw. schwach-kompakte) Fortsetzung $\tilde{T}: E \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.
- (5) Für jeden Banachraum X besitzt jeder kompakte (bzw. schwach-kompakte) Operator $T: G^{\perp\perp} \rightarrow X$ eine kompakte (bzw. schwach-kompakte) Fortsetzung $\tilde{T}: E'' \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.
- (6) Für jeden endlich-dimensionalen Raum X besitzt jeder beschränkte, lineare Operator $T: G \rightarrow X$ eine beschränkte, lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.
- (7) Für jeden endlich-dimensionalen Raum X besitzt jeder beschränkte, lineare Operator $T: G^{\perp\perp} \rightarrow X$ eine beschränkte, lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E'' \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

Nun zeigen wir, wie unsere Ergebnisse mit P_λ -Räumen zusammenhängen:

9. Definition:

Ein Banachraum G heißt P_λ -Raum genau dann, wenn für jeden Banachraum E , der G enthält, eine Projektion P von E auf G existiert mit $\|P\| \leq \lambda$.

Die P_1 -Räume wurden von Nachbin [1], Goodner [1] und Kelley [1] charakterisiert:

Ein Banachraum ist genau dann ein P_1 -Raum, wenn er isometrisch isomorph einem Raum $C(X)$ ist, wobei X ein extrem unzusammenhängender, kompakter Hausdorffraum sei. Das Problem der Charakterisierung von P_λ -Räumen für $\lambda > 1$ ist noch offen.

Aus Korollar 3.3 in Fakhoury [1] erhält man sofort unter Verwendung von Satz 5 in dem Spezialfall, daß E durch E' und G durch $G^\perp$ ersetzt wird, den folgenden Satz, welcher äquivalente Bedingungen dafür angibt, daß für einen Banachraum G der Bidualraum G'' ein P_λ -Raum ist. Man beachte, wie schon bei den letzten Aussagen, daß $(E', G^\perp)$ stets Eigenschaft (P'') besitzt (siehe §1 Satz 7).

10. Satz:

Für einen Banachraum G sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) G'' ist ein P_λ -Raum.
- (2) Für jeden Banachraum E , der G enthält, und für jeden Banachraum X besitzt jeder kompakte (bzw. schwach-kompakte) Operator $T: G^{\perp\perp} \rightarrow X$ eine kompakte (bzw. schwach-kompakte) Fortsetzung $\tilde{T}: E'' \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

- (3) Für jeden Banachraum E , der G enthält, und für jeden endlich-dimensionalen Raum X besitzt jeder beschränkte, lineare Operator $T: G^{\perp\perp} \rightarrow X$ eine beschränkte, lineare Fortsetzung $\tilde{T}: E^{\perp\perp} \rightarrow X$ mit $\|\tilde{T}\| \leq \lambda \|T\|$.

§ 3. Charakterisierungen von Hilberträumen durch Schnitteigenschaften der metrischen Projektion

In diesem Paragraphen verwenden wir lineare, sowie gleichmäßig stetige Schnitte für die λ -metrische Projektion, um Banachräume zu charakterisieren, welche isomorph zu Hilberträumen sind.

Außerdem geben wir unter Verwendung von linearen Schnitten für die metrische Projektion Charakterisierungen von normierten Räumen, welche isometrisch isomorph zu Prähilberträumen sind.

Der erste Satz betrifft die oben erwähnte isomorphe Version.

1. Satz:

Für einen Banachraum E betrachten wir die folgenden Aussagen:

- (1) E ist isomorph einem Hilbertraum.
- (2) Für jeden abgeschlossenen Teilvektorraum G von E gibt es ein $\lambda \geq 1$, so daß ein linearer Schnitt für $p_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$ existiert.
- (3) Für jeden abgeschlossenen Teilvektorraum G von E gibt es ein $\lambda \geq 1$, so daß ein gleichmäßig stetiger Schnitt für $p_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$ existiert.

Dann ist (1) äquivalent zu (2) und, falls E reflexiv ist, (2) äquivalent zu (3).

Beweis:

Wir zeigen, daß (2) aus (1) folgt:

Falls E isomorph einem Hilbertraum ist, ist jeder abgeschlossene Teilvektorraum G von E komplementiert.

Nach Theorem 8.8.10 in Brown, Page [1] existiert also eine beschränkte Projektion $P: E \rightarrow G$ von E auf G .

Also existiert ein $\lambda' = 1$ mit $\|P\| \leq \lambda'$.

Für alle $x \in E$ und alle $g \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} \|x - P(x)\| &= \|(x-g) - P(x-g)\| \leq \|x - g\| + \|P(x - g)\| \\ &\leq \|x - g\| + \lambda' \|x - g\| = (1 + \lambda') \|x - g\|. \end{aligned}$$

Definieren wir $\lambda := 1 + \lambda'$, so folgt:

$P(x) \in P_G^\lambda(x)$ für alle $x \in E$.

Also ist $P: E \rightarrow G$ ein linearer Schnitt für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

Wir zeigen, daß (1) aus (2) folgt:

Sei G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E .

Dann existiert ein $\lambda \geq 1$ und ein linearer Schnitt

$f_G^\lambda: E \rightarrow G$ für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \|f_G^\lambda(x)\| &\leq \|x\| + \|x - f_G^\lambda(x)\| \leq \|x\| + \lambda d(x, G) \\ &\leq (1 + \lambda) \|x\|. \end{aligned}$$

Also ist $f_G: E \rightarrow G$ eine beschränkte Projektion von E auf G .

Nach Lemma 8.8.8. in Brown, Page [1] gilt:

$E = G \oplus (\text{Id} - f_G)(E)$, d.h. G ist komplementiert.

Aus Theorem 1 in Lindenstrauß, Tzafriri [1] folgt schließlich, daß E isomorph einem Hilbertraum ist.

Wir zeigen nun, daß (3) aus (2) folgt, falls E reflexiv ist:

Sei G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E .

Dann existiert nach (2) ein $\lambda \geq 1$ und ein linearer

Schnitt $f_G^\lambda: E \rightarrow G$ für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

$f_G^\lambda: E \rightarrow G$ ist stetig in $x=0$, denn für alle $x \in E$ gilt:

$$\|f_G(x)\| \leq \|x - f_G(x)\| + \|x\| \leq \lambda d(x, G) + \|x\| = (1+\lambda)\|x\|.$$

Also ist $f_G^\lambda: E \rightarrow G$ gleichmäßig stetig und es gilt (3).

Wir zeigen, daß (2) aus (3) folgt:

Sei G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E .

Dann existiert nach (3) ein $\lambda_1 \geq 1$ und ein gleichmäßig

stetiger Schnitt $f_G^\lambda: E \rightarrow G$ für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

Offensichtlich gilt: $f_G^\lambda(g) = g$ für alle $g \in G$.

Falls E reflexiv ist, folgt aus Korollar 2 in Lindenstrauss [2],

daß eine beschränkte, lineare Projektion $P: E \rightarrow G$ von

E auf G existiert, d.h. $\|P\| \leq \lambda_2$ für ein $\lambda_2 \geq 1$.

Wie oben zeigt man, daß für alle $x \in E$ und alle $g \in G$ gilt:

$$\|x - P(x)\| \leq (1 + \lambda_2) \|x - g\|.$$

Definieren wir $\lambda := 1 + \lambda_2$, so ist $P: E \rightarrow G$ ein linearer

Schnitt für $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Fakhoury bewies in [1] die Äquivalenz der Aussagen (1) und (2)

mit $P_{G^1}^\lambda: E \rightarrow 2^{G^1}$ anstelle von $P_G^\lambda: E \rightarrow 2^G$.

Wir beweisen nun unter Verwendung von Korollar 5 in § 2

die folgende Charakterisierung von Hilberträumen mittels

linearer Schnitte für die metrische Projektion.

2. Satz:

Für einen normierten Raum E mit $\dim E \geq 3$ sind die

beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(1) E ist isometrisch isomorph einem Prähilbertraum.

(2) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq \dim E - 2$,

so daß für alle Teilvektorräume G

von E mit $\dim G = n$ gilt: Es existiert ein linearer

Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $P_G: E \rightarrow 2^G$.

Beweis:

Es ist wohlbekannt, daß Aussage (2) aus (1) folgt:

Wir zeigen nun, daß (1) aus (2) folgt:

Zunächst zeigen wir, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß $\dim E = n + 2$ sei: Angenommen, der Satz gilt für alle E' mit $\dim E' = n + 2$ und für alle $G \subseteq E$ mit $\dim G = n$ existiere ein linearer Schnitt für $P_G: E \rightarrow 2^G$. Dann existiert ein linearer Schnitt für $P_G: E' \rightarrow 2^G$ für alle $E' \subseteq E$ mit $\dim E' = n + 2$ und alle $G \subseteq E'$ mit $\dim G = n$. Also sind alle $E' \subseteq E$ mit $\dim E' = n + 2$ nach Annahme isometrisch isomorph einem Prähilbertraum.

Nach dem Satz von Jordan und Neumann (siehe Bourbaki [1], Kapitel V, Exercise 2, S. 138) gilt also das Parallelogrammgesetz $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ in allen $E' \subseteq E$ mit $\dim E' = n + 2$ und damit in ganz E , woraus wieder aus dem Satz von Jordan und Neumann folgt, daß E selbst isometrisch isomorph einem Prähilbertraum ist. Sei also $\dim E = n + 2$.

Wir zeigen, daß aus der Voraussetzung des Satzes folgt, daß E' isometrisch isomorph einem Prähilbertraum ist.

Sei G_0 ein beliebiger zweidimensionaler Teilvektorraum von E' und $\{x_1', x_2'\}$ eine Basis von G_0 .

Wir definieren: $G := \{x \in E: x_1'(x) = 0 = x_2'(x)\}$.

Da x_1' und x_2' linear unabhängig sind, ist $\dim E/G = 2$, woraus folgt: $\dim G = n$.

Nach Voraussetzung existiert also ein linearer Schnitt

$$f_G: E \rightarrow G \quad \text{für} \quad P_G: E \rightarrow 2^G.$$

Aus Korollar 5 in § 2 folgt nun die Existenz einer

Projektion $P: E' \rightarrow G^\perp$ von E' auf $G^\perp$ mit $\|P\| = 1$.

Wir zeigen: $G^\perp = G_0$

Die Relation $G_0 \subseteq G^\perp$ ist klar.

Für $x' \in G^\perp$ gilt: falls $x \in E$ ist und $x'_1(x) = 0 = x'_2(x)$ ist, folgt $x'(x) = 0$.

Nach Lemma 10 in Dunford-Schwartz [1] ist deshalb x' eine Linearkombination von x'_1 und x'_2 , woraus folgt daß x' in G_0 liegt.

Es existiert also eine Projektion $P: E' \rightarrow G_0$ von E' auf G_0 mit $\|P\| = 1$.

Dies gilt für alle zweidimensionalen Teilvektorräume G_0 von E' .

Nach dem Satz von Kakutani (siehe Bourbaki [1], Kapitel V, Exercise 13, S. 144) ist damit E' isometrisch isomorph einem Prähilbertraum und daher ebenfalls $E = E''$.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Dieser Satz wurde in Singer [1] (Theorem 5.2, S. 249) unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß E strikt konvex sei, was zur Folge hat, daß alle endlich-dimensionalen Teilvektorräume von E schon tschebyscheff sind. Im Beweis werden Charakterisierungen strikt konvexer Räume durch Tschebyscheff-Mengen (siehe Singer [1], Korollar 3.3, S. 110) und mittels maximaler Elemente, die auf Krein zurückgeht (siehe Singer [1], S. 110). Wir haben einen einfachen Beweis gegeben ohne Verwendung beider Charakterisierungen.

Satz 2 charakterisiert Prähilberträume mittels linearer Schnitte der metrischen Projektion auf endlich-dimensionale Räume. Wir beweisen nun eine ähnliche Aussage, lineare Schnitte der metrischen Projektion auf endlich-kodimensionale Räume betreffend.

3. Satz:

Für einen normierten Raum E mit $\dim E \geq 3$ betrachten wir die beiden folgenden Aussagen:

- (1) E ist isometrisch isomorph einem Prähilbertraum.
- (2) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n \leq \dim E - 1$,
so daß für alle abgeschlossenen Teilvektorräume G von E mit $\dim E/G = n$ gilt: G ist proximal und
es existiert ein linearer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$
für $p_G: E \rightarrow 2^G$.

Dann gilt:

$$(2) \Rightarrow (1)$$

$$(1) \Rightarrow (2), \text{ falls } E \text{ Banachraum ist.}$$

Beweis:

Die Aussage (1) $\Rightarrow$ (2) im Fall, daß E ein Banachraum ist, ist wohlbekannt.

Wir zeigen nun, daß (1) aus (2) folgt:

Nach Satz 2 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\dim E = \infty$ sei.

Wir zeigen außerdem, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß $n = 2$ sei:

Angenommen, der Satz gilt für alle abgeschlossenen Teilvektorräume G von E mit $\dim E/G = 2$.

Sei E_1 ein beliebiger abgeschlossener Teilvektorraum von E mit $\dim E/E_1 = n - 2$ und G ein abgeschlossener Teilvektorraum von E_1 mit $\dim E_1/G = 2$. Dann gilt: $\dim E/G = n$.

Nach Voraussetzung ist G proximal in E und es existiert ein linearer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $p_G: E \rightarrow 2^G$.

Dies gilt für alle abgeschlossenen Teilvektorräume G von E_1 mit $\dim E_1/G = 2$.

Also ist nach Annahme E_1 isometrisch isomorph einem Prähilbertraum. Dies gilt für alle abgeschlossenen Teilvektorräume E_1 von E mit $\dim E/E_1 = n - 2$.

Nach dem Satz von Jordan und von Neumann folgt wie im Beweis zu Satz 2, daß E selbst isometrisch isomorph einem Prähilbertraum ist.

Sei also $\dim E = \infty$ und $n = 2$.

Wir zeigen, wie im Beweis zu Satz 2, daß E' isometrisch isomorph einem Hilbertraum ist.

Sei G_0 ein beliebiger zweidimensionaler Teilvektorraum von E' und $\{x'_1, x'_2\}$ eine Basis von G_0 .

Dann ist $G := \{x \in E: x'_1(x) = 0 = x'_2(x)\}$ ein abgeschlossener Teilvektorraum von E mit $\dim E/G = 2$.

Also existiert nach Voraussetzung ein linearer Schnitt $f_G: E \rightarrow G$ für $p_G: E \rightarrow 2^G$, woraus unter Verwendung von Korollar 5 in § 2 folgt, daß eine Projektion

$P: E' \rightarrow G_0$ existiert mit $\|P\| = 1$.

Man beachte: $G^\perp = G_0$ (siehe Beweis zu Satz 2).

Nach dem Satz von Kakutani ist also E' isometrisch isomorph einem Prähilbertraum und damit auch E'' .

Da E isometrisch isomorph in E'' eingebettet werden kann, ist auch E isometrisch isomorph einem Prähilbertraum.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Dieser Satz wurde in Singer [1] (Theorem 4.2, S. 351) unter zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß E strikt konvex sei. Die Bemerkung nach Satz 2 gilt hier sinngemäß.

Wir geben nun, wieder unter Verwendung von Korollar 5 in § 2, eine Charakterisierung von Prähilberträumen mittels linearer Schnitte für $P_{G^\perp}: E' \rightarrow 2^{G^\perp}$.

4. Satz:

Für einen normierten Raum E mit $\dim E \geq 3$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) E ist isometrisch isomorph einem Prähilbertraum
- (2) Für jeden zweidimensionalen Teilvektorraum G von E existiert ein linearer Schnitt $f_{G^\perp}: E' \rightarrow G^\perp$ für $p_{G^\perp}: E' \rightarrow 2^{G^\perp}$.

Beweis:

Wir zeigen, daß (2) aus (1) folgt:

Sei E isometrisch isomorph einem Prähilbertraum.

Für jeden abgeschlossenen Teilvektorraum G von E ist G schwach-abgeschlossen in E' . Aus Korollar 2.5 (Singer [1], S. 101) ist damit $G^\perp$ proximal in E' .

Es ist wohlbekannt, daß, da E und damit auch E' isometrisch isomorph einem Prähilbertraum ist, für jeden zweidimensionalen Teilvektorraum G von E $G^\perp$ tschebyscheff und der eindeutig bestimmte Schnitt $f_{G^\perp}: E' \rightarrow G^\perp$ linear ist.

Wir zeigen, daß (1) aus (2) folgt:

Es gelte (1). Sei G_0 ein beliebiger zweidimensionaler Teilvektorraum von E . Dann existiert nach Voraussetzung ein linearer Schnitt $f_{G_0^\perp}: E' \rightarrow G_0^\perp$ für $p_{G_0^\perp}: E' \rightarrow 2^{G_0^\perp}$.

Nach Korollar 5 in § 2 für $E:=E'$ und $G:=G_0^\perp$ existiert eine Projektion $P: E'' \rightarrow G_0^{\perp\perp}$ von E'' auf $G_0^{\perp\perp}$ mit $\|P\| = 1$.

Da $G_0^{\perp\perp}$ isometrisch isomorph G_0' und G_0 reflexiv ist, können wir G_0 und G_0' identifizieren. $P|_E: E \rightarrow G_0$ ist damit eine Projektion von E auf G_0 mit $\|P\| = 1$.

Dies gilt für alle zweidimensionalen Teilvektorräume von E . Also ist E nach dem Satz von Kakutani isometrisch isomorph einem Prähilbertraum.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] Achieser N.J., Theory of Approximation, Frederick Ungar Publishing Co., New York (1956)
- [1] Alfsen E., Effros E., Structure in real Banach spaces I, II, erscheint in Math. Annalen
- [1] Blatter J., Zur Stetigkeit von mengenwertigen metrischen Projektionen, Schriften des Rheinisch-Westfälischen Instituts für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn, Serie A Nr. 16 (1967) (zugleich Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1870)
- [2] Blatter J., Approximative Kompaktheit verallgemeinerter rationaler Funktionen, J. of Appr. Theory 1 (1968) , 85-93
- [3] Blatter J., Grothendieck spaces in approximation theory, Mem. Amer. Math. Soc., No. 120 (1972)
- [1] Blatter J., Morris P.D., Wulbert D.E., Continuity of set-valued metric projections, Math. Annalen 178 (1968), 12-24
- [1] Brosowski B., Deutsch F., Some new continuity concepts for metric projections, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 974-978
- [2] Brosowski B., Deutsch F., On some geometric properties of suns, Journal of Approximation Theory 10 (1974), 245-267
- [1] Brown A.L., Best n-dimensional approximation of functions, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 577-594
- [2] Brown A.L., On continuous selections for metric projections in spaces of continuous functions, Journal of Functional Analysis 8 (1971), 431-499

- [1] Brown A.L., Page A., Elements of Functional Analysis, Van Nostrand Reinhold Company London, New York (1970)
- [1] Cheney E.W., Introduction to Approximation Theory, Mc Graw-Hill Book Co., New York (1966)
- [1] Day M.M., Normed linear spaces, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1958)
- [1] Deutsch F., Pollul W., Singer I., On set-valued metric projections, Hahn-Banach extension maps and spherical image maps, Duke Math. Journal 40 (1973), 355-370
- [1] Dixmier J., Sur un théorème de Banach, Duke Math. Journal 15 (1948), 1057-1071
- [1] Dunford N., Schwartz J.T., Linear Operators I, Interscience publisher, New York (1958)
- [1] Efimov N., Steckin S., Some properties of Chebyshev sets, Dokl. Akad. Nauk SSSR 118 (1958), 17-19
- [1] Fakhoury H., Sélections linéaires associées au théorème de Hahn-Banach, Journal of Functional Analysis 11 (1972), 436-452
- [2] Fakhoury H., Projections de meilleure approximation continues dans certains espaces de Banach, C.R. Acad. Sci. 276 (1973), Série A 45-48
- [1] Himmelberg C.J., van Vleck F.S., Some selection theorems for measurable functions, Canad. J. Math. 21 (1969), 394-399
- [1] Goodner D.B., Projections in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 89-108
- [1] Kakutani S., Concrete representation of abstract M spaces, Ann. of Math. 42 (1941), 994-1024
- [1] Kelley J.L., Banach spaces with the extension property, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 323-326

- [1] Klee V., Remarks on nearest points in normed linear spaces, Proceedings of the Colloquium on convexity, Copenhagen 1965, Copenhagen 1967, 168-176
- [1] Knott J., Metrische Projektionen auf konvexe Kegel und Spektraldarstellung nichtlinearer Operatoren nach Zarantonello, Diplomarbeit, Erlangen (1974)
- [1] Köthe G., Topologische lineare Räume, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1960)
- [1] Kripke, unveröffentlicht
- [1] Lazar A.J., Spaces of affine continuous functions on simplexes, Trans. Am. Math. Soc. 134 (1968), 503-525
- [1] Lazar A.J., Wulbert D.E., Morris P.D., Continuous selections for metric projections, Journal of Functional Analysis 3 (1969), 193-216
- [1] Lindenstrauss J., Extension of compact operators, Mem. Amer. Math. Soc. 48 (1964)
- [2] Lindenstrauss J., On nonlinear projections in Banach spaces, Michigan Math. J. 11 (1964), 263-287
- [1] Lindenstrauss J., Tzafriri L., On the complemented subspace problem, Israel J. Math. 9 (1971), 263-269
- [1] Meinardus G., Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York (1964)
- [1] Michael E.A., Continuous selections I, Ann. Math. 63 (1956), 361-382
- [1] Morris P.D., Metric projections onto subspaces of finite codimension, Duke Math. J. 35 (1968), 799-808
- [1] Nachbin L., A theorem of the Hahn Banach type for linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 28-46

- [1] Phelps R.R., Chebysév subspaces of finite dimension in L_1 ,
Proc. Am. Math. Soc. 17 (1966), 646-652
- [1] Singer I., Best approximation in normed linear spaces
by elements of linear subspaces, Springer-Verlag Berlin,
Heidelberg, New York (1970)
- [2] Singer Ivan, On set-valued metric projections, Proc. Coll.
on linear operators and approximation, Oberwolfach (1971)
- [1] Zarantonello E.H., Projections on convex sets in Hilbert
space and spectral theory, Contributions to nonlinear
Functional Analysis, Academic Press, New York (1971),
237-424

Lebenslauf

Am 13. Januar 1948 wurde ich als Sohn des Postpersonalratsvorsitzenden Rudolf Nürnberger und seiner Ehefrau Lotte, geb. Schödner, in Brand bei Marktredwitz (Bayern) geboren.

Von 1954 bis 1958 besuchte ich die Volksschule in Marktredwitz und danach den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig des Gymnasiums Marktredwitz, wo ich die Reifeprüfung ablegte.

Nach Ableistung des Grundwehrdienstes in den Jahren 1967 bis 1969 begann ich im Wintersemester 1969/70 das Studium der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg. Ich besuchte Vorlesungen und Seminare der Professoren H. Bauer, K. Jacobs, D. Kölzow, G. Meinardus und G. Nöbeling. 1971 legte ich die Diplom-Vorprüfung und 1974 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik ab.

Seit dem 1. April 1974 bin ich als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Erlangen-Nürnberg am Lehrstuhl von Prof. Dr. G. Meinardus tätig und gleichzeitig Doktorand bei Prof. Dr. D. Kölzow.

Erlangen, im Februar 1975

Copie - Center 2000
852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30